

Fortgeschrittenenpraktikum – Vorbereitung

# Supraleitung

Erik Streb\*, Martin Kavalar†

16. Juli 2007

Betreuer: Herr Dr. Denner

## 1 Einführung

Bei sehr tiefen Temperaturen werden die meisten Metalle, viele Legierungen und schon bei nicht ganz so tiefen Temperaturen keramikartige Isolatoren supraleitend, d. h. der elektrische Widerstand verschwindet. Dies geschieht bei einer für die Materialien charakteristischen Sprungtemperatur  $T_c$ . Im supraleitenden Zustand ändert sich außerdem sprunghaft die Wärmekapazität  $c_p$ . Desweiteren verhält sich das Material wie ein perfekter Diamagnet. Mit Hilfe der BCS-Theorie konnte das Phänomen der Supraleitung hinreichend erklärt werden.

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Freies Elektronengas

Um das Verhalten von Leitungselektronen in einem Festkörper zu beschreiben, bedient man sich des von Sommerfeld entwickelten Modells des freien Elektronengases, bei dem die Elektronen als ideales Gas betrachtet werden. Sie befinden sich in einem Potentialtopf, der über die physischen Grenzen des Festkörpers definiert wird und den die Elektronen bei Zimmertemperatur auch nicht verlassen können. Wechselwirkungen zwischen den Elektronen werden zunächst vernachlässigt. Die Verteilung der Elektronen liefert die Fermifunktion, da die Elektronen einen Spin besitzen, und somit fermiverteilt sind.

---

\*E-Mail: mail@erikstreb.de

†E-Mail: kavalar@gmail.com

Bei  $T = 0\text{K}$  besetzen die Elektronen alle Zustände der Fermikugel im  $k$ -Raum bis zur Fermienergie  $E_F$  (auch „Fermikante“ genannt). Bei höheren Temperaturen weicht die Zustandsdichte an der Fermikante entsprechend der Fermiverteilung auf.

## 2.2 BCS-Theorie

Im allgemeinen ist die Wechselwirkung zwischen zwei Leitungselektronen repulsiv. Es kann jedoch bei tiefen Temperaturen auch eine attraktive Wechselwirkung auftreten. Bewegt sich ein Elektron mit dem Wellenvektor  $k$  durch den Leiter, so deformiert es dabei durch Coulombwechselwirkung mit den Ionenrümpfen das Gitter. Dies erhöht lokal die positive Raumladungsdichte. Da die Ionen im Vergleich zu den Elektronengeschwindigkeiten sehr langsam relaxieren, sieht ein Leitungselektron, das genau den entgegengesetzten  $k$ -Vektor und einen entgegengesetzten Spin hat, also  $-k$ , eine positive Ladung. Diese kann die repulsive Wechselwirkung überkompensieren und somit zu einem gebundenen Zustand führen, dessen Energie geringer ist als die zweier ungebundener Leitungselektronen (man kann dies auch als Austausch eines virtuellen Phonons betrachten). Diesen gebundenen Zustand bezeichnet man als *Cooperpaar*, welche einen ganzzahligen Spin haben (Boson). Im Gegensatz zu den übrigen freien Elektronen (mit Spin  $\frac{1}{2}$ ) können Bosonen alle denselben Quantenzustand besetzen, was sie in diesem Falle auch tun, da alle Paare dieselbe Energie und denselben Spin haben. Man kann sie daher alle mit einer einzigen Wellenfunktion beschreiben. Legt man nun ein elektrisches Feld an, erhalten die Elektronen alle denselben Impuls bzw. nehmen alle dieselbe Energie auf. Somit fließt ein Strom ohne Widerstand, denn würden die Elektronen mit dem Gitter wechselwirken und Energie abgeben, befänden sie sich nicht mehr alle im selben Quantenzustand.

### 2.2.1 Energielücke

Betrachtet man nun den Grundzustand eines supraleitenden Systems ( $T = 0\text{K}$ ), so sind alle Leitungselektronen in Cooperpaaren gebunden, da dieser Zustand den energetisch günstigsten darstellt. Nichtsdestotrotz wechseln die Cooperpaare stets zwischen Cooperpaar-Zuständen. Wechselwirkt ein Cooper-Elektron (mit dem Wellenvektor  $k$ ) mit dem Gitter, so ändert sich der Wellenvektor zu  $k'$ . Das angeregte Phonon überträgt nun seine Energie an das Elektron  $-k$ , welches anschliessend in einen durch  $-k'$  charakterisierten Zustand übergeht. Damit dieser Prozess überhaupt stattfinden kann, muss der Cooperzustand  $k'$ ,  $-k'$  auch frei sein. Dies ist aber nur in einer dünnen Schale um die Fermikante der Fall.

Als Energielücke bezeichnet man die Differenz zwischen der Grundzustandsenergie eines Leiters im normalleitenden Zustand und der um die Bildungsenergie eines Cooperpaares reduzierten Grundzustandsenergie, also derjenigen im supraleitenden Zustand.

## 2.3 Isotopeneffekt

Die Sprungtemperatur  $T_c$ , also die Temperatur, bei der das Material in die supraleitende Phase übergeht, hängt von der Masse der das Gitter bildenden Atome ab. Dies stellten *Maxwell* und *Reynolds* im Jahr 1950 fest, als sie die Sprungtemperatur verschiedener

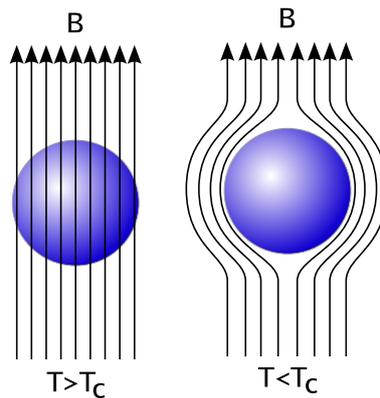


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Meißner-Ochsenfeld-Effekts.

Quecksilberisotope bestimmten. Dabei stellten sie fest, dass eine kleinere Masse eine höhere Sprungtemperatur zur Folge hat. Eine kleinere Masse hat ein größeres, elementares Phononenquant zur Folge. Demzufolge wächst die Energieschale um die Fermifläche, innerhalb derer der Austausch virtueller Phononen und somit auch Cooperpaarbildung stattfinden kann.

## 2.4 Meißner-Ochsenfeld-Effekt

Befindet sich ein Leiter in einem Magnetfeld  $B$ , so wird dieser zunächst von  $B$  durchsetzt. Wird der Leiter abgekühlt, so wird bei Erreichen der Sprungtemperatur das Magnetfeld komplett aus der Probe herausgedrängt (siehe Abbildung 1). Dabei hängt  $T_c$  von  $B$  ab. Bei einem bestimmten Feld  $B_c$  wird  $T_c = 0$ . Umgekehrt hängt bei gegebener Temperatur  $T$  das kritische Magnetfeld  $B_c$  von dieser folgendermaßen ab:

$$B_c(T) = B_c(0) \left( 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right) \quad (1)$$

Ist das Magnetfeld herausgedrängt, so zirkulieren in einer sehr dünnen Schicht an der Oberfläche Ströme, die das Magnetfeld am Eindringen hindern.

### 2.4.1 Londongleichung

Die Londongleichung resultiert aus einer heuristischen Betrachtungsweise des Phänomens der Supraleitung. Betrachtet man zunächst einen normalen Leiter, so gilt das ohm'sche Gesetz:

$$\vec{j} = \hat{\sigma} \vec{E} \quad (2)$$

Die Ladungsträger bewegen sich unter Einfluss eines konstanten elektrischen Feldes im Leiter. Die innere Reibung wird durch den ohm'schen Widerstand beschrieben.

Verschwindet nun der Widerstand ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), so bewegt sich die Ladungsträger unter Einfluss eines elektrischen Feldes beschleunigt. Dieser Fall tritt bei einem Supraleiter auf. Es ergibt sich

$$q_s \vec{E} = \frac{dm_s \vec{v}}{dt} \quad (3)$$

Der Index  $s$  kennzeichnet die Eigenschaften der supraleitenden Ladungsträger. Die durch das elektromagnetische Feld erzeugte Kraft steht dabei im Gleichgewicht zur Trägheitskraft. Mit der Stromdichte  $\vec{j}_s = n_s q_s \vec{v}$  und der Ladungsträgerkonzentration  $n_s$  ergibt sich für (3)

$$\vec{E} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_s \vec{j}}{n_s q_s^2} \right) \quad (4)$$

Substituiert man  $\Lambda = \frac{m_s}{n_s q_s^2}$ , so erhält man die sogenannte erste london'sche Gleichung

$$\vec{E} = \frac{d}{dt} (\Lambda \vec{j}) \quad (5)$$

welche die beschleunigte, reibungsfreie Bewegung von Ladungen im Supraleiter beschreibt.

Will man nun untersuchen, wie ein Magnetfeld auf die Bewegung der Ladungsträger wirkt, muss man das Induktionsgesetz betrachten:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (6)$$

Wir setzen nun (5) in (6) ein und erhalten die zweite london'sche Gleichung

$$\frac{d}{dt} \text{rot} \Lambda \vec{j} = -\frac{d}{dt} \vec{B} \quad (7)$$

$$\text{rot} \Lambda \vec{j} = -\vec{B} \quad (8)$$

Diese Gleichung besagt also, dass ein äußeres Magnetfeld im Supraleiter Kreisströme an der Oberfläche erzeugt, die aufgrund des nicht vorhandenen Widerstands bestehen bleiben und ein Gegenfeld induzieren. Dieses Gegenfeld kompensiert das äußere Magnetfeld. Die Gleichung (8) beschreibt also den bereits erwähnten Meißner-Ochsenfeld-Effekt.

Man kann die exponentiell abfallende Eindringtiefe des äußeren Magnetfeldes berechnen, die sogenannte london'sche Eindringtiefe. Sie beschreibt die Strecke in den Supraleiter hinein, nach der das äußere Magnetfeld auf  $\frac{1}{e}$  seines Wertes abgefallen ist.

## 2.5 Supraleitertypen

Bei den Supraleitern unterscheidet man grundsätzlich zwischen verschiedenen Ausprägungen, die sich zumeist in der Sprungtemperatur  $T_c$  und vor allem durch ihr Verhalten unter Einfluss eines äußeren Magnetfeldes unterscheiden.

Unter Supraleitern erster Art versteht man Supraleiter, die ein durch den Meißner-Ochsenfeld-Effekt beschriebenes Verhalten an den Tag legen. Ein äußeres Magnetfeld wird so lange aus dem Volumen herausgedrängt, bis entweder ein Magnetfeld so groß

wird (kritisches Feld  $B_c$ ), dass es die supraleitende Phase zerstört, oder die Stromdichte im Supraleiter so groß wird (kritische Stromdichte  $\vec{j}_c$ ), dass die supraleitende Phase zusammenbricht. Typische Vertreter dieser Art sind die meisten Metalle, wie auch die in unserem Versuch zu untersuchenden Elemente Zinn und Indium.

Supraleiter zweiter Art zeichnen sich dadurch aus, dass sie sich bis zu einem unteren kritischen Magnetfeld  $B_{c1}$  wie Supraleiter erster Art verhalten (Meißnerphase). Oberhalb dieses Magnetfeldes dringt magnetischer Fluss in den Supraleiter ein. Aus diesem von Null verschiedenen Magnetfeld im Supraleiter resultieren nun geschlossene Ringströme, genannt Fluss-Schläuche, welche sich periodisch anordnen und den Rest des Supraleiters von dem Magnetfluss sozusagen abschirmen. Es findet also noch Supraleitung statt, jedoch nur außerhalb der Fluss-Schläuche. Ein Minimum der freien Enthalpie wird erreicht, wenn sich die Fluss-Schläuche an den Eckenpunkten gleichseitiger Dreiecke anordnen. Ab einem oberen kritischen Feld  $B_{c2}$  bricht diese sogenannte Shubnikov-Phase zusammen, das Feld durchdringt das Material vollständig und die supraleitende Phase bricht zusammen. Ein Beispiel für Supraleiter zweiter Art sind Hochtemperatursupraleiter wie zum Beispiel Yttrium-Barium-Kupferoxide.

Auf die Behandlung Supraleiter dritter Art soll hier verzichtet werden.

## 2.6 Thermodynamik

Der supraleitende Zustand stellt eine thermodynamische Phase dar. Diese kommt durch einen reversiblen Phasenübergang zweiter Art zustande, welcher durch die freie Enthalpie bestimmt ist. Ist diese kleiner bei der jeweils anderen Phase, so findet der Phasenübergang statt. Dieser ist in unserem Fall dadurch gekennzeichnet, dass bei der kritischen Temperatur  $T_c$  ein Sprung in der Wärmekapazität  $c_p$  auftritt. Während in der normalleitenden Phase die Wärmekapazität linear mit  $T$  gegen Null geht, so fällt sie nach einem Sprung nach oben bei  $T_c$  exponentiell mit sinkender Temperatur ab. Dies liegt an der bosonischen Natur der Cooperpaare und der daraus resultierenden Besetzungsstatistik. In der normalleitenden Phase verläuft die Dispersionsrelation hingegen kontinuierlich.