# Kapitel 2

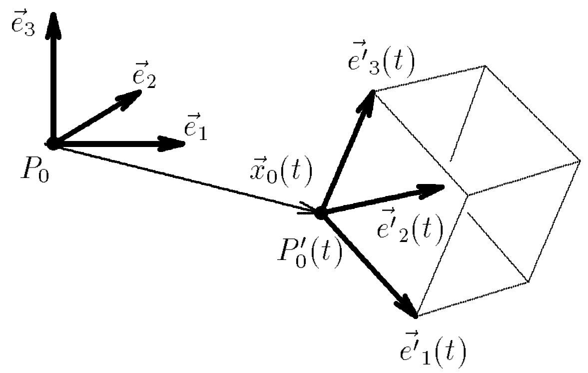
# Starre Körper

## 2.1 Kinematik

### 2.1.1 Allgemeine Beschreibung

#### 2.1.1.1 Raumfestes und körperfestes Koordinatensystem

Wie immer sei ein **raumfestes** Bezugssystem gewählt, d.h. ein Koordinatenursprung $P_0$ und orthogonale Achsenrichtungen entspr. den Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Die Bewegung eines **starren** Körpers läßt sich dadurch beschreiben, daß man am Körper selbst einen Koordinatenursprung $P'_0$ und orthogonale Achsenrichtungen entspr. den Einheitsvektoren $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3$ markiert und dann $\vec{x}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{P_0P'_0}$ sowie die $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3$ als zeitabhängige Linearkombinationen der $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ angibt:




Natürlich gilt für jeden Zeitpunkt $t$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \vec{e'}_1(t) \\ \vec{e'}_2(t) \\ \vec{e'}_3(t) \end{pmatrix} = R(t) \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}} \tag{2.1}$$

mit einer eindeutigen Dreh**matrix** $R(t)$. Wir schreiben $R(t) = R_{\tau\vec{\omega}}$, falls

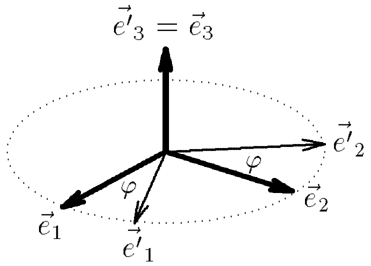
$$\vec{e'}_j = \boldsymbol{D}_{\tau\vec{\omega}} \vec{e}_j \quad \text{für } j = 1, 2, 3$$

mit dem im Drehimpulssatz (Abschn. 1.2.2.4) eingeführten Dreh**operator** $\boldsymbol{D}_{\tau\vec{\omega}}$ gilt.

> **Warnung:** Im Gegensatz zu $\boldsymbol{D}_{\tau\vec{\omega}}$ ist $R_{\tau\vec{\omega}}$ von der Wahl des Orthonormalsystems $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ abhängig !

Z.B. gilt:

$$\boxed{R_{\varphi\vec{e}_3} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.} \tag{2.2}$$




Allgemein stellt der $j$-te **Zeilen**vektor der Transformationsmatrix die Komponenten bzgl. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ des Bildes von $\vec{e}_j$ dar. Daher:

$$\boxed{\begin{aligned} &R = \begin{pmatrix} R_1{}^1 & R_1{}^2 & R_1{}^3 \\ R_2{}^1 & R_2{}^2 & R_2{}^3 \\ R_3{}^1 & R_3{}^2 & R_3{}^3 \end{pmatrix} \text{ Matrix für Drehspiegelung} \\ &\iff \sum_{k=1}^{3} R_j{}^k R_l{}^k = \delta_{jl} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{für } j = k\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases} \end{aligned}} \tag{2.3}$$

Die Bewegung des starren Körpers läßt sich also beschreiben durch Angabe des zeitabhängigen Translationsvektors $\vec{x}_0(t)$ sowie der zeitabhängigen Drehmatrix $R(t)$.

Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten $x^1(t), x^2(t), x^3(t)$ bzgl. des raumfesten Systems und den Koordinaten $x'^1(t), x'^2(t), x'^3(t)$ des **körperfest**en Systems (*passive* Koordinatentransformation) ist gegeben durch[1]

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{3} x^j(t)\vec{e}_j = \vec{x}_0(t) + \sum_{j=1}^{3} x'^j(t)\vec{e'}_j(t) \\ &\underset{(2.1)}{\iff} \begin{pmatrix} x'^1(t) \\ x'^2(t) \\ x'^3(t) \end{pmatrix} = R(t) \begin{pmatrix} x^1(t) - x_0^1(t) \\ x^2(t) - x_0^2(t) \\ x^3(t) - x_0^3(t) \end{pmatrix}\,. \end{aligned}} \tag{2.4}$$

**Beweis:**[2]

$$\begin{aligned} \left(x^k - x_0^k\right)\vec{e}_k &= x'^j\vec{e'}_j = x'^j R_j{}^k \vec{e}_k \\ \rightsquigarrow\quad x^k - x_0^k &= x'^j R_j{}^k \\ \rightsquigarrow\quad x'^l &\underset{(2.3)}{=} x'^j \textstyle\sum_{k=1}^3 R_j{}^k R_l{}^k = \sum_{k=1}^3 R_l{}^k \left(x^k - x_0^k\right) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Behaupt. ∎



[1] Hier geht die Orthonormalität der Basen wesentlich ein (vgl. Anhang A.1.3 der Einf. i.d. Theor. Phys. ).

Für einen körperfesten Punkt sind die Koordinaten $x'^1(t), x'^2(t), x'^3(t)$ des momentanen Aufenthaltsortes bzgl. des körperfesten Systems zeitlich konstant.

Aus (2.4) folgt[3]

$$\boxed{\begin{aligned} &\boldsymbol{D}_{\tau\vec{\omega}} \sum_{j=1}^{3} x^j \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3} x'^j \vec{e}_j \\ \iff &\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = R_{-\tau\vec{\omega}} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} . \end{aligned}} \tag{2.5}$$

(*aktive* Koordinatentransformation). Der $j$-te **Spalten**vektor der Transformationsmatrix $R_{-\tau\vec{\omega}}$ stellt die Komponenten des Bildes von $\vec{e}_j$ unter $\boldsymbol{D}_{\tau\vec{\omega}}$ bzgl. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ dar.[4]

#### 2.1.1.2 Infinitesimale Drehungen

Aufgrund von

$$R_{-(\tau+\Delta\tau)\vec{\omega}} = R_{-\Delta\tau\vec{\omega}} R_{-\tau\vec{\omega}} = R_{-\tau\vec{\omega}} R_{-\Delta\tau\vec{\omega}}$$

sieht man leicht, daß

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} R_{-\tau\vec{\omega}} = J_{\vec{\omega}} R_{-\tau\vec{\omega}} = R_{-\tau\vec{\omega}} J_{\vec{\omega}}} \tag{2.6}$$

mit

$$\boxed{J_{\vec{\omega}} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} R_{-\tau\vec{\omega}} \right)_{|\tau=0}} \tag{2.7}$$

und somit[5]

$$\boxed{\begin{aligned} R_{-\tau\vec{\omega}} &= \exp\left(\tau J_{\vec{\omega}}\right) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\tau J_{\vec{\omega}}\right)^{\nu} \end{aligned}} \tag{2.8}$$

gilt. Man bezeichnet die Matrix $J_{\vec{\omega}}$ als ***Generator der*** (Matrix der) ***infinitesimalen Drehung***

$$R_{-\vec{\omega}\mathrm{d}\tau} = \mathbb{1} + J_{\vec{\omega}}\,\mathrm{d}\tau \,.$$

WS 1995/96

[2]Man beachte die Summationskonvention (Summation über gleiche Indizes unterschiedlicher Stellung in einunddemselben Monom.

[3]Man wende die inverse Drehung $\boldsymbol{D}_{-\tau\vec{\omega}}$ auf (2.5) an und vergleiche mit(2.4) für $\vec{x}_0 = 0$.

[4]Nach dem oben (zur Begründung von (2.3)) gesagten bedeutet das: $R_{-\tau\vec{\omega}} = \left(R_{+\tau\vec{\omega}}\right)^{\mathrm{T}}$.

[5]$R_{-\tau\vec{\omega}} = \exp\left(\tau J_{\vec{\omega}}\right)$ ist die nach Kap. 5 d. Einf. i.d. Theor. Phys. eindeutige Lösung von (2.6) zur Anfangsbedingung $R_{-\tau\vec{\omega}} = \mathbb{1}$.

Entsprechend den Überlegungen zum Drehimpulssatz (Abschn. 1.2.2.4) folgt aus (2.5):

$$\boxed{J_{\vec\omega}\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\vec\omega\times\vec x)\cdot\vec e_1\\(\vec\omega\times\vec x)\cdot\vec e_2\\(\vec\omega\times\vec x)\cdot\vec e_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega^2x^3-\omega^3x^2\\\omega^3x^1-\omega^1x^3\\\omega^1x^2-\omega^2x^1\end{pmatrix}\;.}\tag{2.9}$$

Für $J_{\vec\omega}$ ergibt sich daraus explizit

$$\boxed{J_{\vec\omega}=\begin{pmatrix}0&-\omega^3&\omega^2\\\omega^3&0&-\omega^1\\-\omega^2&\omega^1&0\end{pmatrix}\quad\text{für }\vec\omega=\sum_{j=1}^3\omega^j\vec e_j}\tag{2.10}$$

und somit

$$\boxed{J_{\vec\omega}=\omega^1J_{\vec e_1}+\omega^2J_{\vec e_2}+\omega^3J_{\vec e_3}}\tag{2.11}$$

sowie

$$\boxed{\begin{aligned}&\left[J_{\vec e_j},J_{\vec e_k}\right]\stackrel{\text{def}}{=}J_{\vec e_j}J_{\vec e_k}-J_{\vec e_k}J_{\vec e_j}\\&=\sum_{l=1}^3\epsilon_{jkl}J_{\vec e_l}\quad\text{für }j,k=1,2,3\,,\\&\text{wobei:}\\&\qquad\epsilon_{jkl}\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases}+1&\text{falls }(j,k,l)\text{ gerade Permut. v. }(1,2,3)\,,\\-1&\text{falls }(j,k,l)\text{ ungerade Permut. v. }(1,2,3)\,,\\0&\text{sonst}\,.\end{cases}\end{aligned}}\tag{2.12}$$

Im Falle

$$\dot R(t)=J_{-\vec\omega(t)}R(t)$$

setzt sich der momentane Bewegungszustand (zur Zeit $t$) des starren Körpers offensichtlich zusammen aus

a) einer reinen Translationsbewegung mit der Geschwindigkeit $\dot{\vec x}_0(t)$ und

b) einer reinen Rotationsbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit $|\vec\omega(t)|$ im Rechtsschraubensinn um die Achse in Richtung von[6]

$$\vec{\omega}'(t)\stackrel{\text{def}}{=}\omega^1(t)\vec{e'}_1(t)+\omega^2(t)\vec{e'}_2(t)+\omega^3(t)\vec{e'}_3(t)$$

durch den Ursprung des körperfesten Koordinatensystems.

**Anmerkung:** Man sieht leicht, daß $\vec\omega(t)$ nicht von der speziellen Wahl des Ursprungs des körperfesten Systems abhängt.

WS 1995/96

[6]Nach (2.10) gilt nämlich:

$$J_{-\vec\omega(t)}\begin{pmatrix}\vec{e'}_1(t)\\\vec{e'}_2(t)\\\vec{e'}_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{\omega}'(t)\times\vec{e'}_1(t)\\\vec{\omega}'(t)\times\vec{e'}_2(t)\\\vec{\omega}'(t)\times\vec{e'}_3(t)\end{pmatrix}\;.$$

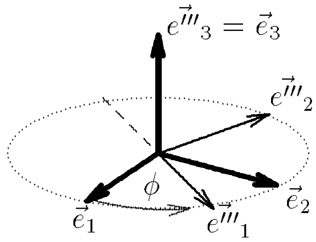
#### 2.1.1.3 EULERsche Winkel

Der Vorteil der Schreibweise (2.1) beruht auf folgender Eigenschaft der $R$-Matrizen:

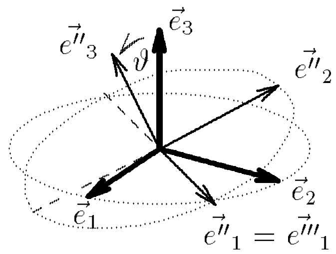
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \vec{e'}_j = \boldsymbol{D}_{\tau_1\vec{\omega}_1}\vec{e}_j \\ \vec{\omega'}_2 = \sum\limits_{j=1}^{3}(\vec{\omega}_2\cdot\vec{e}_j)\,\vec{e'}_j \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_{\tau_2\vec{\omega'}_2}\boldsymbol{D}_{\tau_1\vec{\omega}_1}\vec{e}_1 \\ \boldsymbol{D}_{\tau_2\vec{\omega'}_2}\boldsymbol{D}_{\tau_1\vec{\omega}_1}\vec{e}_2 \\ \boldsymbol{D}_{\tau_2\vec{\omega'}_2}\boldsymbol{D}_{\tau_1\vec{\omega}_1}\vec{e}_3 \end{pmatrix} = R_{\tau_2\vec{\omega}_2}R_{\tau_1\vec{\omega}_1}\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix}.} \tag{2.13}$$

Anschaulich macht man sich leicht klar, daß sich jede Drehung in folgender Weise durch drei aufeinanderfolgende Drehungen realisieren läßt:

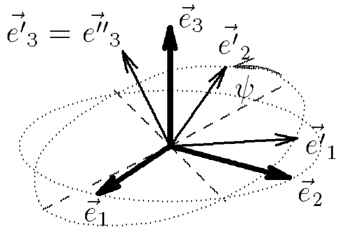
1. Drehung (um die 3-Achse):




2. Drehung (um die **neue** 1-Achse):




3. Drehung (um die **neue** 3-Achse):




Somit gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l} R(t)\ \text{Drehmatrix} \\ \Longleftrightarrow R(t) = R_{\psi(t)\vec{e}_3}R_{\vartheta(t)\vec{e}_1}R_{\phi(t)\vec{e}_3}\ \text{für geeign. } \phi(t),\vartheta(t),\psi(t)\,. \end{array}} \tag{2.14}$$

Jede Drehung läßt sich also mit geeigneten $\phi, \vartheta, \psi$ in der Form

$$\vec{e}_j \longmapsto \vec{e'}_j(\phi,\vartheta,\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{D}_{\psi \vec{e''}_3(\phi,\vartheta)} \boldsymbol{D}_{\vartheta \vec{e'''}_1(\phi)} \boldsymbol{D}_{\phi \vec{e}_3} \vec{e}_j \quad \text{für } j = 1,2,3$$

schreiben, wobei:

$$\left.\begin{aligned} \vec{e'''}_j(\phi) &\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{D}_{\phi \vec{e}_3} \vec{e}_j\,, \\ \vec{e''}_j(\phi,\vartheta) &\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{D}_{\vartheta \vec{e'''}_j(\phi)} \vec{e'''}_j(\phi)\,, \\ \vec{e'}_j(\phi,\vartheta,\psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{D}_{\psi \vec{e''}_3(\phi,\vartheta)} \vec{e''}_j(\phi,\vartheta) \end{aligned}\right\} \quad \text{für } j = 1,2,3\,.$$

Offensichtlich sind die sog. EULER***schen Winkel*** $\phi(t), \vartheta(t), \psi(t)$ (lokal) gemeinsam mit den $\vec{x}_0(t) \cdot \vec{e}_j$ als **generalisierte Koordinaten** geeignet. Mit

$$\begin{aligned} \vec{e}_3 &= \sin\vartheta\, \vec{e''}_2(\phi,\vartheta) + \cos\vartheta\, \vec{e'}_3(\phi,\vartheta,\psi) \\ &= \sin\vartheta \left(\sin\psi\, \vec{e'}_1(\phi,\vartheta,\psi) + \cos\psi\, \vec{e'}_2(\phi,\vartheta,\psi)\right) + \cos\vartheta\, \vec{e'}_3(\phi,\vartheta,\psi)\,, \\ \vec{e'''}_1(\phi) &= \cos\psi\, \vec{e'}_1(\phi,\vartheta,\psi) - \sin\psi\, \vec{e'}_2(\phi,\vartheta,\psi)\,, \\ \vec{e''}_3(\phi,\vartheta) &= \vec{e'}_3(\phi,\vartheta,\psi) \end{aligned}$$

und den anschaulich offensichtlichen Beziehungen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_{\psi \vec{e''}_3(\phi+\phi',\vartheta)} \boldsymbol{D}_{\vartheta \vec{e'''}_1(\phi+\phi')} \boldsymbol{D}_{(\phi+\phi')\vec{e}_3} &= \boldsymbol{D}_{\phi' \vec{e}_3} \boldsymbol{D}_{\psi \vec{e''}_3(\phi,\vartheta)} \boldsymbol{D}_{\vartheta \vec{e'''}_1(\phi)} \boldsymbol{D}_{\phi \vec{e}_3}\,, \\ \boldsymbol{D}_{\psi \vec{e''}_3(\phi,\vartheta+\vartheta')} \boldsymbol{D}_{(\vartheta+\vartheta') \vec{e'''}_1(\phi)} \boldsymbol{D}_{\phi \vec{e}_3} &= \boldsymbol{D}_{\vartheta' \vec{e'''}_1(\phi)} \boldsymbol{D}_{\psi \vec{e''}_3(\phi,\vartheta)} \boldsymbol{D}_{\vartheta \vec{e'''}_1(\phi)} \boldsymbol{D}_{\phi \vec{e}_3} \end{aligned}$$

ergibt sich leicht

$$\dot{R} = \left( J_{-\dot{\phi}(\sin\vartheta(\sin\psi\vec{e}_1 + \cos\psi\vec{e}_2) + \cos\vartheta\vec{e}_3)} + J_{-\dot{\vartheta}(\cos\psi\vec{e}_1 - \sin\psi\vec{e}_2)} + J_{-\dot{\psi}\vec{e}_3} \right) R\,,$$

und somit unter Beachtung von (2.11):

$$\boxed{\begin{aligned} &(2.14) \Longrightarrow \dot{R}(t) = J_{-\vec{\omega}(t)} R(t) \\ &\text{mit:} \\ &\vec{\omega}(t) = \left(\dot{\phi}(t)\sin\vartheta(t)\sin\psi(t) + \dot{\vartheta}(t)\cos\psi(t)\right)\vec{e}_1 \\ &\qquad + \left(\dot{\phi}(t)\sin\vartheta(t)\cos\psi(t) - \dot{\vartheta}(t)\sin\psi(t)\right)\vec{e}_2 \\ &\qquad + \left(\dot{\psi}(t) + \dot{\phi}(t)\cos\vartheta(t)\right)\vec{e}_3\,. \end{aligned}} \tag{2.15}$$

Es gilt also:[7]

$$\boxed{\begin{aligned} &\left.\begin{matrix}(2.1)\\(2.14)\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \dot{\vec{e'}}_j(t) = \vec{\omega'}(t) \times \vec{e'}_j(t) \\ &\text{mit:} \\ &\vec{\omega'}(t) = \left(\dot{\phi}(t)\sin\vartheta(t)\sin\psi(t) + \dot{\vartheta}(t)\cos\psi(t)\right)\vec{e'}_1 \\ &\qquad + \left(\dot{\phi}(t)\sin\vartheta(t)\cos\psi(t) - \dot{\vartheta}(t)\sin\psi(t)\right)\vec{e'}_2 \\ &\qquad + \left(\dot{\psi}(t) + \dot{\phi}(t)\cos\vartheta(t)\right)\vec{e'}_3\,. \end{aligned}} \tag{2.16}$$

WS 1995/96

[7]Vgl. Schluß von 2.1.1.2

#### 2.1.1.4 Coriolis-Kraft

(2.16) bestimmt den Zusammenhang zwischen tatsächlichen zeitlichen Änderungen und denjenigen, die bzgl. des körperfesten Systems in Erscheinung treten:

Mit der Definition

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)_{\text{Körper}} \sum_{j=1}^{3} G'^j(t)\vec{e'}_j(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} G'^j(t)\right) \vec{e'}_j(t)} \tag{2.17}$$

folgt aus (2.16)

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{G}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)_{\text{Körper}} \vec{G}(t) + \vec{\omega}'(t) \times \vec{G}(t)} \tag{2.18}$$

und somit

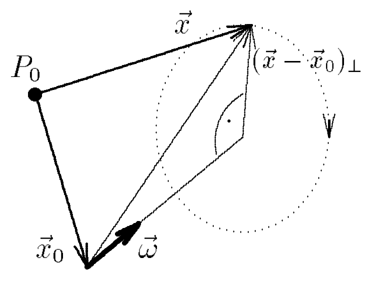
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{\omega}'(t) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)_{\text{Körper}} \vec{\omega}'(t)\,.} \tag{2.19}$$

Mit (2.18) folgt aus (2.18):

$$\ddot{\vec{G}} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)^2_{\text{Körper}} \vec{G} + \vec{\omega}' \times \left(\vec{\omega}' \times \vec{G}\right) + 2\vec{\omega} \times \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)_{\text{Körper}} \vec{G} + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{\omega}'\right) \times \vec{G}\,.$$

Für $\vec{G} = \vec{x} - \vec{x}_0$ ergibt sich damit als Nebenresultat die **Bewegungsgleichung eines Massenpunktes im körperfesten System:**[8]

$$\boxed{\begin{array}{l}
m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}_{\text{ges}}(t) \\
\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)^2_{\text{Körper}} (\vec{x}(t) - \vec{x}_0(t)) \\ = \vec{F}_{\text{ges}}(t) + \vec{Z}(t) + \vec{C}(t) + m\ddot{\vec{x}}_0(t) + m\left(\vec{x}(t) - \vec{x}_0(t)\right) \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{\omega}'(t) \end{array} \right. \\
\text{mit } \vec{\omega}'(t) \text{ entspr. (2.16) und :} \\
\quad \begin{array}{rcll} \vec{Z}(t) & \stackrel{\text{def}}{=} & m\left|\vec{\omega}'(t)\right|^2 (\vec{x}(t) - \vec{x}_0(t))_\perp & \text{“Zentrifugalkraft” bzgl. } \vec{x}_0 \\ \vec{C}(t) & = & -2m\vec{\omega}'(t) \times \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)_{\text{Körper}} (\vec{x}(t) - \vec{x}_0(t)) & \textsc{Coriolis}\text{-}\boldsymbol{Kraft} \end{array}
\end{array}} \tag{2.20}$$






[8]Man beachte: $\vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{G}) = -\left|\vec{\omega}'\right|^2 \vec{G} + (\vec{\omega}' \cdot \vec{G})\vec{\omega}'$.

Üblicherweise wird (2.20) nur für den Spezialfall $\vec{x}_0(t) = 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{\omega}'$ diskutiert.[9]

### 2.1.2 Kinetische Energie

#### 2.1.2.1 Drehimpuls

Allgemein gilt für ein System von $N$ Massenpunkten:

Kinetische Energie
= Kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung
+ Kinetische Energie der Rotationsbewegung bzgl. des Schwerpunktes;

d.h.:

$$\boxed{\begin{array}{l} T = \frac{1}{2} M \left|\dot{\vec{X}}\right|^2 + \sum\limits_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2} \left|\dot{\vec{x}}_\nu - \dot{\vec{X}}\right|^2 \\ \text{wobei:} \\ \quad M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu = \text{Gesamtmasse}, \\ \quad \vec{X} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{x}_\nu = \text{Ortsv. d. Schwerpunktes}. \end{array}} \tag{2.21}$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2} \left|\dot{\vec{x}}_\nu\right|^2 \\ &= \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2} \left|(\dot{\vec{x}}_\nu - \dot{\vec{X}}) + \dot{\vec{X}}\right|^2 \\ &= \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2} \left|\dot{\vec{x}}_\nu - \dot{\vec{X}}\right|^2 + + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\dot{\vec{x}}_\nu - \dot{\vec{X}})}_{=0} \dot{\vec{X}} + \tfrac{1}{2} M \left|\dot{\vec{X}}\right|^2 \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Sind die $m_\nu$ einem starren Körper fest eingeprägt[10] und ist $\vec{x}_0$ der Ortsvektor eines **körperfesten** Punktes, so gilt nach (2.15):[11]

$$\boxed{\dot{\vec{x}}_\nu = \dot{\vec{x}}_0 + \vec{\omega}' \times (\vec{x}_\nu - \vec{x}_0)\,.} \tag{2.22}$$

Mit der Definition

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{L}(\vec{\omega}', t) \\ \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\vec{x}_\nu(t) - \vec{x}_0(t)\right) \times \left(\vec{\omega}' \times (\vec{x}_\nu(t) - \vec{x}_0(t))\right) \quad \text{für } \textbf{bel. } \vec{\omega}', t \end{array}} \tag{2.23}$$



[9] Siehe z.B. [Gol72, Abschn. 4–9].
[10] Vgl. Modell des starren Körpers entspr. Beispiel (iii) von 1.1.1.1.
[11] Vgl. auch Schluß von 2.1.1.2.

gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{L}\left(\vec{\omega}'(t), t\right) = \text{momentaner Gesamtdrehimpuls bzgl. } \vec{x}_0(t) \\ \quad \textbf{falls } \vec{\omega}'(t) = \left\{\begin{array}{l}\text{vektorielle Winkelgeschwindigkeit} \\ \text{der momentanen Rotationsbewegung}\,,\end{array}\right.\end{array}} \tag{2.24}$$

$$\boxed{(2.22) \Longrightarrow \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2} \left|\dot{\vec{x}}_\nu(t) - \vec{x}_0(t)\right|^2 = \frac{1}{2}\vec{\omega}'(t) \cdot \vec{L}\left(\vec{\omega}'(t), t\right)\,.} \tag{2.25}$$

**Beweis von (2.25):** Die Behauptung folgt direkt aus

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2} \left|\dot{\vec{x}}_\nu(t) - \vec{x}_0(t)\right|^2 &\underset{(2.22)}{=} \textstyle\sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2} (\dot{\vec{x}}_\nu - \dot{\vec{x}}_0) \cdot \left(\vec{\omega}' \times (\vec{x}_\nu - \vec{x}_0)\right) \\ &\underset{\text{Zykl. d. Spatpr.}}{=} \textstyle\frac{\vec{\omega}'}{2} \sum_{\nu=1}^{N} (\vec{x}_\nu - \vec{x}_0) \times m_\nu \left(\dot{\vec{x}}_\nu - \dot{\vec{x}}_0\right)\end{aligned}$$

mit (2.24). ∎

Mit (2.21) folgt daraus

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Für starre Körper:} \\ \qquad T(t) = \dfrac{M}{2}\left|\dot{\vec{x}}_0(t)\right|^2 + \dfrac{\vec{\omega}'(t)}{2} \cdot \vec{L}\left(\vec{\omega}'(t), t\right)\,, \\ \textbf{falls } \text{entweder } \vec{x}_0 = \vec{X} \text{ oder } \dot{\vec{x}}_0(t) = 0\,, \text{ wobei:} \\ \qquad \vec{\omega}'(t) = \text{vektorielle Winkelgeschw. gem. (2.16)}\,.\end{array}} \tag{2.26}$$

#### 2.1.2.2 Trägheitstensor[12]

Nach (2.23) ist die $t$-abhängige Abbildung

$$\boxed{(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2) \longrightarrow \theta_t(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\omega}_1 \cdot \vec{L}(\vec{\omega}_2, t)} \tag{2.27}$$

von $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^1$ bilinear, stellt also einen $t$-abhängigen Tensor 2. Stufe dar, den man als ***Trägheitstensor*** bezeichnet. Mit (2.23) folgt

$$\boxed{\begin{array}{l}\theta_t(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2) \\ = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left((\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2)\,|\vec{x}_\nu(t) - \vec{x}_0(t)|^2 - (\vec{\omega}_1 \cdot (\vec{x}_\nu(t) - \vec{x}_0(t)))\,(\vec{\omega}_2 \cdot (\vec{x}_\nu(t) - \vec{x}_0(t)))\right)\end{array}} \tag{2.28}$$

und somit auch die Symmetrie des Trägheitstensors:

$$\boxed{\theta_t(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2) = \theta_t(\vec{\omega}_2, \vec{\omega}_1)\,.} \tag{2.29}$$

WS 1995/96

[12]Vgl. Abschnitt 4.4.2 der Einf. i.d. Theor. Phys. .

**Beweis von (2.28):** Aufgrund der Zyklizität des Spatproduktes folgt aus (2.27) und (2.23)

$$\theta_t(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2) = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\vec{\omega}_1 \times (\vec{x}_\nu(t) - \vec{x}_0(t))\right) \cdot \left(\vec{\omega}_2 \times (\vec{x}_\nu(t) - \vec{x}_0(t))\right) ,$$

und daraus folgt aufgrund der bekannten Formel

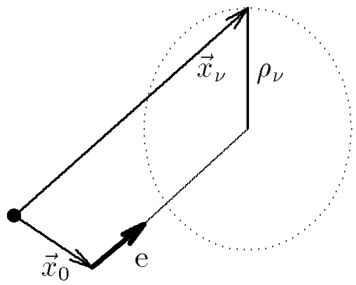
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

die Behauptung. ∎

Für beliebiges $\vec{e}$ mit $|\vec{e}| = 1$ bezeichnet man

$$\theta_t(\vec{e}.\vec{e}) \underset{(2.28)}{=} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left( |\vec{x}_\nu(t) - \vec{x}_0(t)|^2 - \left|\vec{e} \cdot (\vec{x}_\nu(t) - \vec{x}_0(t))^2\right| \right)$$

als das ***Trägheitsmoment*** bzgl. der Achse durch $\vec{x}_0(t)$ in Richtung $\vec{e}$ :




$$\rho_\nu = \sqrt{|\vec{x}_\nu - \vec{x}_0|^2 - |\vec{e} \cdot (\vec{x}_\nu - \vec{x}_0)|^2}$$

Für eine beliebig vorgegebene Basis $\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\}$ bezeichnet man die $3 \times 3$ Größen

$$\boxed{\theta_{jk}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_t(\vec{b}_j, \vec{b}_k)} \tag{2.30}$$

als die ***kovarianten Komponenten*** von $\theta_t(\cdot, \cdot)$ bzgl. dieser Basis; denn bei Basiswechsel gilt:[13]

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{b'}_j &= \sum_{j=1}^{3} M_j{}^k \vec{b}_k \\ \underset{(2.30)}{\Longrightarrow} \theta'_{jk} &\stackrel{\text{def}}{=} \theta_t\left(\vec{b'}_j, \vec{b'}_k\right) \\ &\underset{\text{Bilin.}}{=} \sum_{r,s=1}^{3} M_j{}^r M_k{}^s \theta_{rs}(t) \,. \end{aligned}} \tag{2.31}$$

Nach (2.29) gilt grundsätzlich

$$\boxed{\theta_{jk}(t) = \theta_{kj}(t)\,.} \tag{2.32}$$

WS 1995/96

[13] Bei ***Pseudo***-Vektoren tritt beim Transformationsverhalten der Komponenten lediglich die Jacobi-Determinante ($\det M$) als Zusatzfaktor auf. Pseudo-Vektoren bezeichnet man (leider) auch als ***axiale Vektoren***.

Wählt man zweckmäßigerweise **für** $\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\}$ in (2.30) die zeitabhängige **körperfeste Basis** $\left\{\vec{e'}_1(t), \vec{e'}_2(t), \vec{e'}_3(t)\right\}$, so **sind die** $\theta_{jk}$ **zeitunabhängig** und es gilt:[14]

$$\boxed{\theta_t\left(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2\right) = \sum_{j,k=1}^{3} \theta_{jk}\left(\vec{\omega}_1 \cdot \vec{e'}_j(t)\right)\left(\vec{\omega}_2 \cdot \vec{e'}_k(t)\right) .} \tag{2.33}$$

Aufgrund der Symmetrie der (2.32) läßt sich zeigen (Übungsaufgabe), daß

$$\boxed{\begin{array}{c} \theta_{jk} = 0 \quad \text{für } j \neq k \\ \text{bei geeigneter Wahl der } \vec{e'}_j(t)\,. \end{array}} \tag{2.34}$$

Sind die $\vec{e'}_j(t)$ im Sinne von (2.34) geeignet gewählt, dann bezeichnet man die

$$I_j \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{jj} = \theta_t\left(\vec{e'}_j(t), \vec{e'}_j(t)\right)$$

als ***Hauptträgheitsmomente*** bzgl. $\vec{x}_0(t)$ und die Achsen in Richtung der $\vec{e'}_j(t)$ durch $\vec{x}_0(t)$ als ***Hauptträgheitsachsen*** bzgl. $\vec{x}_0(t)$.

#### 2.1.2.3 Abhängigkeit der kinetischen Energie von den Eulerschen Winkelfunktionen

Für ausgedehnte Körper definiert man den Trägheitstensor bzgl. $\vec{x}_0(t)$ entspr. (2.28) durch

$$\boxed{\begin{array}{l} \theta_t\left(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2\right) \\ \stackrel{\text{def}}{=} \displaystyle\int_{\text{Körper}} \left(\left(\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2\right)\left|\vec{x} - \vec{x}_0(t)\right|^2 - \left(\vec{\omega}_1 \cdot \left(\vec{x} - \vec{x}_0(t)\right)\right)\left(\vec{\omega}_2 \cdot \left(\vec{x} - \vec{x}_0(t)\right)\right)\right) \mu(\vec{x}, t)\,\mathrm{d}V_{\vec{x}}\,, \\ \text{wobei:} \quad \mu(\vec{x}, t) = \text{Massendichte}\,. \end{array}} \tag{2.35}$$

Entspr. (2.27) gilt dann

$$\boxed{\begin{array}{l} \theta_t\left(\vec{\omega}_1, \vec{\omega'}(t)\right) = \vec{\omega}_1 \cdot \vec{L}(t) \quad \text{für bel. } \vec{\omega}_1\,, \\ \text{mit } \vec{\omega'}(t), \vec{L}(t) \text{ entspr. (2.24)} \end{array}} \tag{2.36}$$

und somit nach (2.26)

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Für starre Körper:} \\ \qquad T(t) = \dfrac{M}{2}\left|\dot{\vec{x}}_0(t)\right|^2 + \dfrac{1}{2}\theta_t\left(\vec{\omega'}(t), \vec{\omega'}(t)\right)\,, \\ \textbf{falls} \text{ entweder } \vec{x}_0 = \vec{X} \text{ oder } \dot{\vec{x}}_0 = 0\,. \end{array}} \tag{2.37}$$

WS 1995/96

[14] Aufgrund der Orthonormalität dieser Basis.

Natürlich sind auch beim starren Körper die Komponenten von $\theta_t$ bzgl. der körperfesten Basis $\left\{\vec{e'}_1(t), \vec{e'}_2(t), \vec{e'}_3(t)\right\}$ zeitunabhängig und erfüllen (2.34). Mit (2.16), (2.33) und (2.34) folgt daraus

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Für starre Körper mit Hauptträgheitsachsen} \\ \textbf{bzgl. } \vec{x}_0(t) \textbf{ in Richtung der } \vec{e'}_j(t): \\ \qquad T = \frac{M}{2}\left|\dot{\vec{x}}_0\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^3 \theta_j \left|\omega^j\right|^2 , \\ \textbf{falls} \text{ entweder } \vec{x}_0 = \vec{X} \text{ oder } \dot{\vec{x}}_0(t) = 0 ,\end{array}} \tag{2.38}$$

mit:

$$\boxed{\begin{array}{lcl}\omega^1 & \stackrel{\text{def}}{=} & \dot{\phi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi , \\ \omega^2 & \stackrel{\text{def}}{=} & \dot{\phi}\sin\vartheta\cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\psi , \\ \omega^3 & \stackrel{\text{def}}{=} & \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\vartheta .\end{array}} \tag{2.39}$$

Natürlich bezeichnen die $\theta_j$ in (2.38) wieder die entsprechenden **zeitabhängigen** Hauptträgheitsmomente.[15]

Falls der Körper rotationssymmetrisch bzgl. der Achse in Richtung $\vec{e'}_3(t)$ durch $\vec{x}_0(t)$ ist, vereinfacht sich (2.38) wegen

$$\boxed{\begin{array}{l}\theta_1 = \theta_2 \\ \Longrightarrow T = \dfrac{M}{2}\left|\dot{\vec{x}}_0\right|^2 + \dfrac{1}{2}\theta_1\left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\vartheta\right) + \dfrac{1}{2}\theta_3\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\vartheta\right)^2 , \\ \text{unter den Voraussetzungen von (2.38).}\end{array}} \tag{2.40}$$

## 2.2 Einfache Kreiselgesetze

### 2.2.1 'Kräftefreier' Kreisel

#### 2.2.1.1 EULERsche Gleichungen

> **Verabredung:** Der Ursprung des körperfesten Systems stimme entweder mit dem Kreiselschwerpunkt überein oder werde in Ruhe gehalten (oder beides). Die $\vec{e'}_j(t)$ zeigen in Richtung der Hauptachsen.

Nach (2.38) gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial}{\partial\dot{\psi}}T - \frac{\partial}{\partial\psi}T = \theta_3\dot{\omega}^3 - (\theta_1 - \theta_2)\,\omega^1\omega^2 . \tag{2.41}$$

WS 1995/96

[15] $T$ =kinetische Energie, $M$ =Gesamtmasse, $\vec{X}$ =Ortsvektor des Schwerpunktes, $\vec{x}_0$ =Ortsvektor des Ursprungs des körperfesten Systems; $\phi, \vartheta, \psi$ EULERsche Winkel der Hauptachsen bzgl. der raumfesten Basis.

Für das Punktsystem-Modell des starren Körpers gilt

$$
\begin{aligned}
Q^{\mathrm{e}}_{\psi} &\underset{(1.44)}{=} \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}^{\mathrm{e}}_{\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial\psi}(\vec{x}_{\nu} - \underbrace{\vec{x}_0}_{\psi\text{-unabh.}}) \\
&\underset{(2.4),(2.14)}{=} \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} x'^{j}_{\nu} \vec{F}^{\mathrm{e}}_{\nu} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial\psi} \vec{e'}_j(\phi, \vartheta, \psi)}_{\underset{(2.16)}{=} \vec{e'}_3 \times \vec{e'}_j} \\
&= \left(\sum_{\nu=1}^{N} (\vec{x}_{\nu} - \vec{x}_0) \times \vec{F}^{\mathrm{e}}_{\nu}\right) \cdot \vec{e'}_3 \,.
\end{aligned}
$$

Mit der Definition

$$
\boxed{\vec{N}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Summe aller durch } \textbf{eingeprägte} \text{ Kräfte erzeugter} \\ \text{momentaner Drehmomente bzgl. } \vec{x}_0(t) \end{array} \right.} \tag{2.42}
$$

ergibt sich mit (2.41) für die LAGRANGE-Gleichungen II. Art

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} T - \frac{\partial}{\partial \psi} T \underset{(1.52)}{=} Q^{\mathrm{e}}_{\psi}
$$

somit:

$$
\theta_3 \dot{\omega}^3 - (\theta_1 - \theta_2)\omega^1 \omega^2 = \vec{N} \cdot \vec{e'}_3 \,.
$$

Diese Gleichung wird man natürlich auch für den kontinuierlichen starren Körper annehmen. Da die Numerierung der $\vec{e'}_j(t)$ (bis auf Rechtshändigkeit) willkürlich ist, folgen die

$$
\boxed{\begin{array}{l} \text{EULER}\textbf{\textit{schen Gleichungen:}}^{16} \\ \qquad \theta_j \dot{\omega}^j(t) - (\theta_k - \theta_l)\omega^k(t)\omega^l(t) = \vec{N}(t) \cdot \vec{e'}_j(t) \\ \textbf{falls } (j,k,l) \text{ gerade Permutation von } 1,2,3\,. \end{array}} \tag{2.43}
$$

**Anmerkung:** Man sieht leicht (Übungsaufgabe) mithilfe von (2.18), (2.34) und (2.36), daß die linke Seite von (2.43) mit $\vec{e'}_j(t) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \vec{L}(t)$ übereinstimmt.[17]

Für den ***kräftefreien Kreisel*** nehmen die EULERschen Gleichungen (2.43) die Form

$$
\boxed{\boxed{\begin{aligned}
\theta_1 \dot{\omega}^1 &= (\theta_2 - \theta_3)\omega^2 \omega^3 \,, \\
\theta_2 \dot{\omega}^2 &= (\theta_3 - \theta_1)\omega^3 \omega^1 \,, \\
\theta_3 \dot{\omega}^3 &= (\theta_1 - \theta_2)\omega^1 \omega^2 \,.
\end{aligned}}} \tag{2.44}
$$

an.

WS 1995/96

[16] **Hier** ist natürlich **nicht** über $j$ zu summieren.

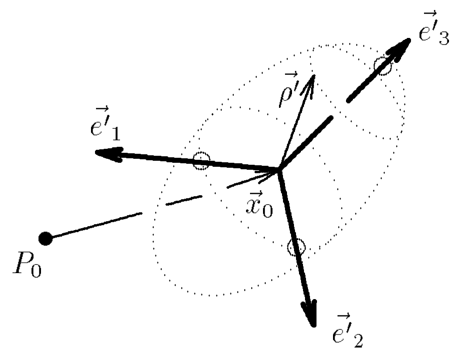
[17] Die momentane vektorielle Winkelgeschwindigkeit ist nach (2.16) $\vec{\omega'}(t) = \sum_{j=1}^{3} \omega^j(t) \vec{e'}_j(t)$ .

#### 2.2.1.2 POINSOTsche Konstruktion

Die $t$-abhängige Fläche

$$\left\{\vec{x}_0(t)+\vec{\rho'}:\ \left\|\theta_t(\vec{\rho'},\vec{\rho'})\right\|=1\right\}$$

bezeichnet man als ***Trägheitsellipsoid*** bzgl. $\vec{x}_0(t)$ :




Aus

$$\vec{\rho'}=\sum_{j=1}^{3}\rho^j\vec{e'}_j \underset{(2.33),(2.34)}{\Longrightarrow} \theta_t(\vec{\rho'},\vec{\rho'})=\sum_{j=1}^{3}\theta_j\left|\rho^j\right|2$$

folgt

$$\vec{\nabla}_{\vec{\rho'}}\theta_t(\vec{\rho'},\vec{\rho'})=\sum_{j=1}^{3}2\theta_j\rho^j\vec{e'}_j(t)$$

und somit[18] nach (2.36):

$$\vec{L}(t)=-\frac{\sqrt{\theta_t(\vec{\omega'}(t),\vec{\omega'}(t))}}{2}\vec{\nabla}_{\vec{\rho'}}\theta_t(\vec{\rho'},\vec{\rho'})_{|_{\vec{\rho'}=-\left\|\frac{\vec{\omega'}(t)}{\sqrt{\theta_t(\vec{\omega'}(t),\vec{\omega'}(t))}}\right\|\cdot\text{Längeneinh.}}}\,. \tag{2.45}$$

> **Geometrische Deutung:** Die Tangentialebene des Trägheitsellipsoids an den Punkt, in dem die momentane Drehachse von $\vec{x}_0(t)$ aus in Richtung von $-\vec{\omega'}(t)$ durch die Ellipsoidfläche tritt, ist senkrecht zu $\vec{L}(t)$.

Der Abstand **o.a. Tangentialebene** zu $\vec{x}_0(t)$ ist somit – von der physikalischen Dimension abgesehen –

$$\begin{aligned}\frac{\vec{\omega'}(t)}{\sqrt{\theta_t(\vec{\omega'}(t),\vec{\omega'}(t))}}\cdot\frac{\vec{L}(t)}{\left|\vec{L}(t)\right|} &\underset{(2.36)}{=} \frac{\sqrt{\theta_t(\vec{\omega'}(t),\vec{\omega'}(t))}}{\left|\vec{L}(t)\right|}\\ &\underset{(2.37)}{=} \frac{\sqrt{2T(t)-M\left|\vec{x}_0(t)\right|^2}}{\left|\vec{L}(t)\right|}\end{aligned}$$

WS 1995/96

[18] $\vec{\rho'}=-\left\|\frac{\vec{\omega'}(t)}{\sqrt{\theta_t(\vec{\omega'}(t),\vec{\omega'}(t))}}\right\|$ · Längeneinheit liegt offensichtlich auf der Oberfläche des Trägheitsellipsoids.

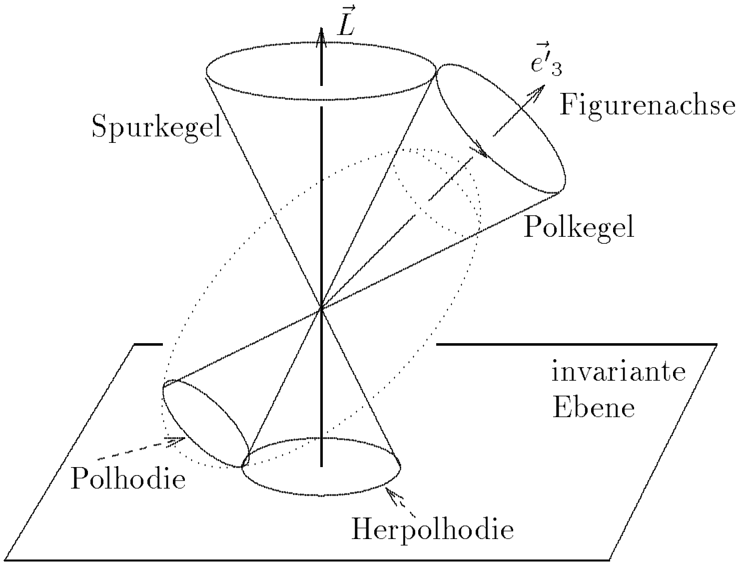



Abb. 2.1: POINSOTsche Konstruktion für kräftefreie Kreisel mit $\theta_1, \theta_2 > \theta_3$

und folglich (gemäß o.a. Verabredung) für den **kräftefreien** Kreisel zeitlich konstant.[19] Daher bezeichnet man diese Ebene als ***invariable Ebene***..

Damit ergibt sich das geometrische Bild gem. Abb. 2.1:

Das Trägheitsellipsoid rollt[20] (im Ruhesystem von $P_0'$) auf der invariablen Ebene ab. Die momentane Drehachse geht also durch $\vec{x}_0(t)$ und den Berührungspunkt des Ellipsoids auf der invariablen Ebene. Die Kurve, die dieser Berührungspunkt auf dem Ellipsoid beschreibt, bezeichnet man als ***Polhodie*** (Polkurve), diejenige, die er auf der invarianten Ebene beschreibt, als ***Herpolhodie*** (Spurkurve).

Eine äquivalente Beschreibung ist das Abrollen des ***Polkegel*** auf dem ***Spurkegel*** gem. Abb. 2.1, wobei die Figurenachse auf dem sog. ***Nutationskegel*** (nicht gezeichnet) um die Drehimpulsachse präzessiert.

**Warnungen:**

(i) Nur für den sog. ***symmetrischen*** Kreisel, d.h. für $\theta_1 = \theta_2$, sind Spur- und Polkegel **Kreis**kegel.

(ii) Abb. 2.1 entspricht dem Falle $\theta_1, \theta_2 > \theta_3$ (gestreckter Kreisel). Im Falle $\theta_1, \theta_2 < \theta_3$ (abgeplatteter Kreisel) liegt die Polhodie so, daß der Polkegel mit seiner Innenseite auf dem Spurkegel abrollt.[21]

(iii) I.a. ist die Herpolhodie **keine** geschlossene Kurve !

WS 1995/96

[19]Man beachte die Anmerkung zu (2.43) und die Erhaltungssätze gemäß Abschnitt 1.2.2.4.

[20]Ein Körper ***rollt*** auf einer Fläche, wenn der Körperpunkt, der die Fläche berührt, jeweils die Momentangeschwindigkeit 0 hat.

[21]Bgl. z.B. [Bud65, Abb. 122.a].

Für $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ (Kugelkreisel) stellt das Trägheitsellipsoid eine Kugel dar. Folglich gilt dafür $\vec{\omega}' \sim \vec{L}$ .

Allgemein legt die POINSOTsche Konstruktion die Geometrie der Kreiselbewegung (relativ zu $\vec{x}_0$) fest. Die Abrollgeschwindigkeit ist so einzurichten, daß $\vec{L}$ stets den vorgegebenen Wert beibehält.

#### 2.2.1.3 Analytische Lösung der EULERschen Gleichungen für den symmetrischen 'kräftefreien' Kreisel

Für einen rotationssymmetrischen Kreisel gilt

$$\theta_1 = \theta_2$$

(bei entspr. Numerierung der $\vec{e'}_l$). Gemäß (2.44) folgt daraus

$$\begin{aligned} \dot{\omega}^1 &= \Omega\omega^2 \,, \\ \dot{\omega}^2 &= -\Omega\omega^1 \,, \\ \dot{\omega}^3 &= 0 \end{aligned}$$

mit:

$$\boxed{\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\theta_1 - \theta_3}{\theta_1}\omega^3 \,.} \tag{2.46}$$

Somit gilt

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Für geeign. } A, t_0 : \\ \quad \begin{aligned} \omega^1(t) &= A\sin\left(\Omega\left(t - t_0\right)\right) \,, \\ \omega^2(t) &= A\cos\left(\Omega\left(t - t_0\right)\right) \,, \\ \omega^3(t) &= \text{const.} \end{aligned} \end{array}} \tag{2.47}$$

Die momentane Drehachse präzessiert also **im körperfesten System** mit der Kreisfrequenz $\Omega$ um die Figurenachse,[22] wenn nicht ausgerechnet $A = 0$ .

Es sei der nichttriviale Fall

$$A \neq 0 \tag{2.48}$$

betrachtet. Da $\dot{\vec{L}} = 0$ ,[23] läßt sich $\vec{e}_3$ parallel zu $\vec{L}$ wählen:

$$\vec{e}_3 \sim \vec{L} \,. \tag{2.49}$$

Gem. POINSOTscher Konstruktion folgt daraus

$$\vartheta = \text{const.}$$

WS 1995/96

[22] Für **negatives** $\Omega$ im Rechtsschraubensinn um $\vec{e'}_3$ .

[23] Vgl. Anm. zu (2.43).

**Abstrakter Beweis:** Bei geeigneter Wahl der Konstanten $C$ gilt

$$\begin{aligned}\cos\vartheta &= C\vec{e'}_3(t)\cdot\vec{L}\\ &\underset{(2.36)}{=} C\theta_t\left(\vec{e'}_3(t),\vec{\omega'}(t)\right)\\ &\underset{(2.33),(2.34)}{=} C\omega^3\theta_3\\ &\underset{(2.47)}{=} \text{const.}\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. ∎

Mit (2.39) und (2.47) ergeben sich daraus folgende drei Gleichungen:

$$\dot\phi(t)\sin\vartheta\sin\psi(t) = A\sin\left(\Omega\left(t-t_0\right)\right)\,, \tag{2.50}$$

$$\dot\phi(t)\sin\vartheta\cos\psi(t) = A\cos\left(\Omega\left(t-t_0\right)\right)\,, \tag{2.51}$$

$$\dot\psi(t)+\dot\phi(t)\cos\vartheta = \omega^3 = \text{const}\,, \tag{2.52}$$

Dank $\theta_1 = \theta_2$ läßt sich o.B.d.A. annehmen, daß (bei geeigneter Wahl von $\vec{e'}_1$)

$$\psi(0) = 0 \tag{2.53}$$

und somit gemäß Poinsotscher Konstruktion sowie (2.47) die Beziehungen

$$\boxed{\begin{aligned}\psi(t) &= \Omega t\,,\\ \Omega t_0 &= 0 \mod 2\pi\,.\end{aligned}} \tag{2.54}$$

gelten.

**Abstrakter Beweis für (2.54):** Aus

$$\tan\psi(t) \underset{(2.48),(2.50),(2.51)}{=} \tan\left(\Omega\left(t-t_0\right)\right)$$

und (2.53) folgt

$$\psi(t) = \Omega t$$

und

$$\Omega\, t_0 = n\pi \quad \text{für geeignetes ganzes } n\,.$$

Ungerades $n$ ist aber mit (2.48)/(2.50) nicht verträglich. ∎

Ebenfalls o.B.d.A. läßt sich annehmen, daß (bei geeigneter Wahl von $\vec{e}_1$)

$$\phi(0) = 0 \tag{2.55}$$

gilt, woraus mit (2.52) und (2.54)

$$\boxed{\phi(t) = \tfrac{\omega^3\theta_3}{\theta_1\cos\vartheta}t} \tag{2.56}$$

folgt.[24] Mit (2.51) und (2.54) folgt daraus schließlich:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \vartheta & = & \arctan \dfrac{A\theta_1}{\omega^3\theta_3} \\ & = & \text{const.} \in [0,\pi)\,. \end{array}} \tag{2.57}$$

**Resultat:** Unter Voraussetzung der Konventionen (2.49), (2.53) und (2.55) sind die EULERschen Winkelfunktionen gegeben durch (2.54), (2.56) und (2.57) mit $\Omega$ entspr. (2.46). Die Werte für $\omega^3$ – und somit $\Omega$ – und für $A$ sind durch die Anfangsbedingungen festgelegt, sobald man sich für eine bestimmte Orientierung der 3-Achsen (raumfest/körperfest) entschieden hat. Gemäß (2.57) bestimmt dann die Orientierung von $\vec{e}_3$ das Vorzeichen von $A$.[25]

### 2.2.2 Der schwere symmetrische Kreisel

**Verabredung:** Alle Bezeichnungen von Abschn. 2.1 seien beibehalten. Die $\vec{e'}_j$ zeigen in Richtung der Hauptträgheitsachsen bzgl. $\vec{x}_0(t)$. Auf den betrachteten starren Körper wirke die vom Schwerefeld $\vec{g}$ hervorgerufene Schwerkraft, sonst keine weiteren eingeprägten Kräfte. Dieser ***schwere Kreisel*** sei symmetrisch, d.h.

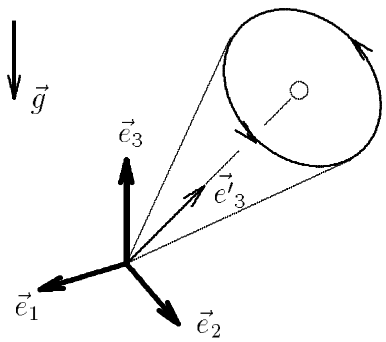
$$\theta_1 = \theta_2\,,$$

und es gelte

$$\vec{X}(t) = \vec{x}_0(t) + l\vec{e'}_3(t)$$

sowie o.B.d.A.:

$$\begin{array}{rcl} \vec{g} & = & -g\vec{e}_3\,, \\ \vec{x}_0(t) & = & 0 \quad \forall\, t\,. \end{array}$$






[24]Man beachte: $\omega^3 - \Omega \underset{(2.46)}{=} \frac{\omega^3\theta_3}{\theta_1}$.

[25]Die Orientierung von $\vec{e'}_3$ bestimmt das Vorzeichen von $\omega^3$.

#### 2.2.2.1 Anwendung der Lagrange-Methode

Die folgende Anwendung der LAGRANGE-Methode läßt sich wie in Absch. 2.41 über das Punktsystem-Modell des starren Körpers rechtfertigen.

Entsprechend obiger Vereinbarung ist

$$U = Mgl\cos\vartheta$$

ein geeignetes Potential und nach (2.40) gilt

$$T = \frac{1}{2}\theta_1\left(\dot\vartheta^2 + \dot\phi^2\sin^2\vartheta\right) + \frac{1}{2}\theta_3\left(\dot\psi + \dot\phi\cos\vartheta\right)^2 .$$

Die entspr. LAGRANGE-Funktion

$$L \underset{(1.55)}{=} \frac{1}{2}\theta_1\left(\dot\vartheta^2 + \dot\phi^2\sin^2\vartheta\right) + \frac{1}{2}\theta_3\left(\dot\psi + \dot\phi\cos\vartheta\right)^2 - Mgl\cos\vartheta$$

hängt also nicht von $\phi$ und $\psi$ ab; d.h. $\phi$ und $\psi$ sind zyklisch. Da die generalisierten Geschwindigkeiten $\dot\phi, \dot\vartheta, \dot\psi$ durch die Nebenbedingungen in keiner Weise eingeschränkt sind, folgt daraus nach (1.60)/(1.61)

$$p_\psi = \theta_3\left(\dot\psi + \dot\phi\cos\vartheta\right) \underset{(2.39)}{=} \theta_3\omega^3 \quad \textbf{zeitlich konstant}^{26} \tag{2.58}$$

(vgl. (2.43) für $j = 3$) und[27]

$$p_\phi = \left(\theta_1\sin^2\vartheta + \theta_3\cos^2\vartheta\right)\dot\phi + \theta_3\dot\psi\cos\vartheta \quad \textbf{zeitlich konstant}\,. \tag{2.59}$$

Anstelle der 3. LAGRANGE-Gleichung II. Art (1.59) verwendet man hier besser den Energiesatz

$$H = \frac{\theta_2}{2}\left(\dot\vartheta^2 + \dot\phi^2\sin^2\vartheta\right) + \frac{\theta_3}{2}(\omega^3)^2 + Mgl\cos\vartheta \quad \textbf{zeitlich konstant}\,. \tag{2.60}$$

(Abschn. 1.2.2.4), dessen Voraussetzungen offensichtlich erfüllt sind. Die drei Erhaltungssätze (2.58)–(2.60) stellen ein System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung für die drei EULERschen Winkelfunktionen dar, das es zu lösen gilt.

WS 1995/96

[26] Wegen $p_\psi = \vec{L}\cdot\vec{e'}_3$ läßt sich das natürlich auch direkt aus der Tatsache schließen, daß das wirkende Gesamtdrehmoment senkrecht zu $\vec{e'}_3$ ist.

[27] Man beachte $p_\phi = \vec{L}\cdot\vec{e}_3$ (Bws. als Übungsaufg.).

#### 2.2.2.2 Integration der Bewegungsgleichungen

Aus

$$\boxed{\dot{\psi} \underset{(2.58)}{=} \tfrac{p_\psi}{\theta_3} - \dot{\phi}\cos\vartheta} \tag{2.61}$$

folgt mit (2.59)

$$p_\phi = \theta_1 \sin^2\vartheta\,\dot{\phi} + p_\psi \cos\vartheta$$

und somit

$$\boxed{\dot{\phi} = \tfrac{p_\phi - p_\psi\cos\vartheta}{\theta_1 \sin^2\vartheta}\,.} \tag{2.62}$$

Es ist also nur noch $\vartheta(t)$ in Abhängigkeit von den Anfangswerten zu bestimmen:
Aus (2.60) und (2.62) folgt

$$\begin{aligned} &\tfrac{\theta_1}{2}\dot{\vartheta}^2 + \tfrac{\left(p_\phi - p_\psi\cos\vartheta\right)^2}{2\theta_1\sin^2\vartheta} + Mgl\cos\vartheta \\ &= H - \tfrac{\theta_3}{2}(\omega_3)^2 \underset{(2.58)}{=} H - \tfrac{\left(p_\psi\right)^2}{2\theta_3} \end{aligned}$$

und daraus nach Multiplikation mit $\frac{2}{\theta_1}\sin^2\vartheta$

$$\dot{u}^2 = f(u)\,, \tag{2.63}$$

wobei:

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &\overset{\text{def}}{=} \cos\theta(t)\,, \\ \alpha &\overset{\text{def}}{=} \frac{2H}{\theta_1} - \frac{\theta_1}{\theta_3}\left(\frac{p_\psi}{\theta_1}\right)^2\,, \\ \beta &\overset{\text{def}}{=} \frac{2Mgl}{\theta_1}\,, \\ f(u) &\overset{\text{def}}{=} (1-u^2)(\alpha - \beta u) - \left(\frac{p_\phi - p_\psi u}{\theta_1}\right)^2\,. \end{aligned}} \tag{2.64}$$

Aus (2.63) folgt unmittelbar[28]

$$\boxed{t = \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{f(u)}}\,.} \tag{2.65}$$

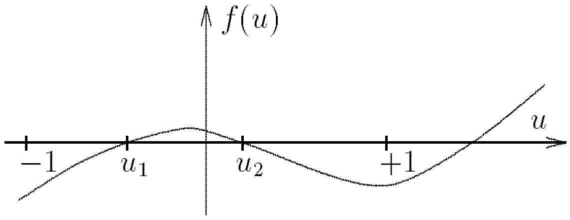
(2.65) liefert $t$ in Abhängigkeit von $\vartheta$. Umkehrung dieser Zuordnung liefert das gesuchte $\vartheta(t)$.

WS 1995/96

[28]Das Vorzeichen der Wurzel ist entsprechend anzupassen !

#### 2.2.2.3 Geometrische Interpretation

Es sei nur der Fall
$$|p_\phi| \neq p_\psi > 0$$
betrachtet. Dann sieht man leicht:[29]
$$f(u) \to \begin{cases} +\infty & \text{für } u \to +\infty\,, \\ -\infty & \text{für } u \to -\infty\,, \end{cases}$$
$$|u| = 1 \Longrightarrow f(u) < 0\,.$$




Da $f(u)$ nach (2.63) nicht negativ sein kann und nach (2.64) $u \in [-1, +1]$ sein muß, ist der Bewegungsablauf durch die Bedingung
$$u_1 \leq u \leq u_2$$
eingeschränkt. Da nach (2.63)
$$\dot{u}(t) = 0 \quad \textbf{nur} \text{ für } t \text{ mit } f(u(t)) = 0$$
gelten kann und außerdem[30]
$$\left. \begin{array}{l} u_1 \neq u_2\,, \\ f(u) = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow 0 \neq \frac{1}{2} f'(u) \underset{(2.63)}{=} \ddot{u}$$
folgt, muß also $u(t)$ im Laufe der Zeit periodisch das Zeitintervall $[u_1, u_2]$ durchlaufen.

**1. Fall:**
$$u_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_\phi}{p_\psi} \in (u_1, u_2)\,.$$

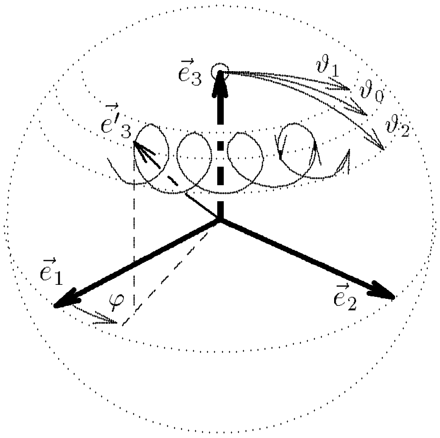
Nach (2.62) ist hier
$$\dot{\phi}(t) \begin{cases} > 0 & \text{für } u_0 > u\,, \\ < 0 & \text{für } u_0 < u\,. \end{cases}$$

WS 1995/96

[29] Vgl. [Gol72, Abschn. 5-7].

[30] Ableitung von (2.63) nach $t$ liefert $2\dot{u}\ddot{u} = \dot{u} f'(u)$ und somit $\ddot{u} = \frac{1}{2} f'(u)$ zunächst für $\dot{u} \neq 0$.

Die Zeitabhängigkeit von $\vec{e'}_3(t)$ läßt sich also wie folgt skizzieren:

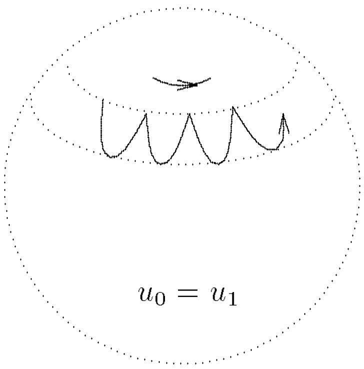



$\vartheta_j = \arccos u_j$ ,

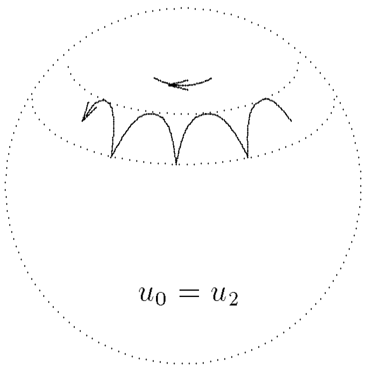
$\varphi = \phi - \frac{\pi}{2}$ ,

<u>hier:</u> $\dot{\phi} > 0$ .

**In den Grenzfällen** $u_0 = u_1$ bzw. $u_0 = u_2$ ändert $\dot{\phi}$ nicht mehr das Vorzeichen und die Schleifen entarten zu Spitzen bei $u = u_1$ bzw. $u = u_2$ :




bzw.




**2. Fall:**

$$\frac{p_\phi}{p_\psi} \notin [u_1, u_2] \, .$$

Hier folgt aus (2.62)

$$\phi(t) \neq 0 \quad \forall \, t \, ,$$

das Vorzeichen von $\dot{\phi}$ ist also zeitlich konstant. Die Zeitabhängigkeit von $\vec{e'}_3(t)$ läßt sich also wie folgt skizzieren: