Kapitel 1

Grundlegendes über eingeschränkte Systeme endlich vieler Massenpunkte

1.1 Formulierung des Hauptproblems

1.1.1 Idealisierte Nebenbedingungen

1.1.1.1 Holonome Nebenbedingungen

Gegeben sei ein System von N Massenpunkten mit Ortsvektoren $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_N(t)$, die durch idealisierte Zusatzmechanismen (z.B. starre Stangen, undehnbare Fäden usw.) beschränkt seien; d.h. bestimmte *Nebenbedingungen* erfüllen müssen, die eine Menge $\mathcal{N}$ von Bahnbewegungen $\{(\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_N(t))\}_{t \in \mathbb{R}}$ als *erlaubt* auszeichnen.

Solche Nebenbedingungen nennt man ***holonom*** ('ganz gesetzlich'), falls ein natürliches l und 'hinreichend gutartige' Funktionen $S_1, \ldots, S_l$ der Vektoren $\vec{x}_\nu$ sowie der Zeit t existieren mit:

$$\begin{aligned} &\{(\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_N(t))\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{N} \\ &\iff S_j\left(\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_N(t), t\right) = 0 \quad \forall t\,;\ j = 1, \ldots, l\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Anmerkungen:

(i) Weder l noch die genaue Form der S_j liegen fest.
Z.B. ist (1.1) äquivalent zu

$$\sum_{j=1}^{l} S_j\left(\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_N(t), t\right)^2 = 0$$

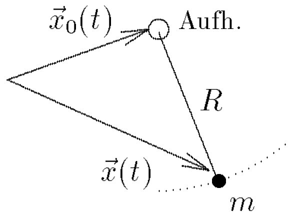
(ii) Wenn sich die Nebenbedingungen **lokal**[1] in der Form (1.1) ausdrücken lassen, so nach obigem Argument auch global.

WS 1995/96

[1]Gemeint ist: Für hinreichend kleine Koordinatenbereiche und Zeitintervalle.

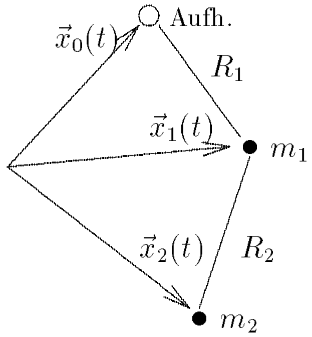
Beispiele:

(i) Sphärisches Pendel:



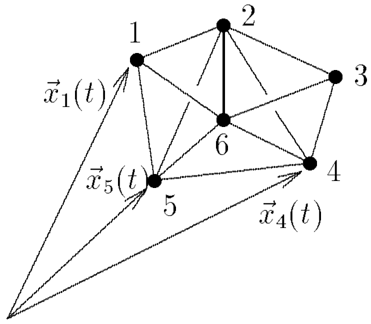
$$N = 1\,, \qquad l = 1\,,$$
$$S_1(\vec{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} R - \|\vec{x} - \underbrace{\vec{x}_0(t)}_{\text{vorgegeben !}}\|\,.$$

(ii) Doppelpendel:



$$N = 2\,, \qquad l = 2\,,$$
$$S_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) \stackrel{\text{def}}{=} R_1 - \|\vec{x}_1 - \vec{x}_0(t)\|\,,$$
$$S_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) \stackrel{\text{def}}{=} R_2 - \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|\,.$$

(iii) Modell für starren Körper:[2] $(N \to \infty)$



$$N = 6\,, \qquad l = \binom{6}{2} = 15\,,$$
$$S_{jk}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_6, t) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{R_{jk}}_{\text{vorgeg.}} - \|\vec{x}_j - \vec{x}_k\|$$
$$\text{für } 1 \leq j < k \leq 6\,.$$

Zur **geometrischen Deutung** von (1.1): Eine Gleichung der Form

$$S(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = \text{const}$$

[2]Für $N > 4$ sind diese Beschränkungs-Gleichungen **nicht** unabhängig voneinander!

bestimmt i.a. eine t-abhängige **Hyperfläche**[3] im $\mathbb{R}^{3N}$.

> **Warnung:** Die Hyperflächen können natürlich entarten.[4] Z.B. läßt sich die Beschränkung von $\vec{x}$ auf die x^3-Achse durch
>
> $$S(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 = 0$$
>
> ausdrücken.

Nach dem Fundamentalsatz der Integralrechnung gilt

$$S_j\left(\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_N(t), t\right) - S_j\left(\vec{x}_1(t_0), \ldots, \vec{x}_N(t_0), t_0\right) = \int_{t_0}^{t} \dot{S}_j\left(\vec{x}_1(t'), \ldots, \vec{x}_N(t'), t'\right) \mathrm{d}t'$$

und daher:

$$(1.1) \iff \begin{cases} S_j\left(\vec{x}_1(t_0), \ldots, \vec{x}_N(t_0), t_0\right) = 0 & \text{für geeign. } t_0 \\ \dot{S}_j\left(\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_N(t), t\right) = 0 & \text{für alle } t \end{cases}$$

Ausgeschrieben lauten die Beziehungen $\dot{S}_j = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} S_{j,0}\left(\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_N(t), t\right) + \sum_{\nu=1}^{N} \dot{\vec{x}}_\nu(t) \cdot \vec{S}_{j,\nu}\left(\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_N(t), t\right) = 0 \\ \text{für } j = 1, \ldots, l \text{ und bel. } t \end{aligned}} \tag{1.2}$$

wobei:

$$\begin{aligned} S_{j,0}\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N, t\right) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t} S_j\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N, t\right) \\ \vec{S}_{j,\nu}\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N, t\right) &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla}_{\vec{x}_\nu} S_j\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N, t\right) \end{aligned} \tag{1.3}$$

> **Erinnerung** (*verallgem. Kettenregel*):
>
> $$\begin{aligned} \dot{f}\left(g_1(t), \ldots, g_N(t)\right) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(g_1(t), \ldots, g_N(t)\right) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\triangle r \to 0} \frac{f(g_1(t+\triangle t), \ldots, g_N(t+\triangle t)) - f(g_1(t), \ldots, g_N(t))}{\triangle t} \\ &= \sum_{\nu=1}^{N} \dot{g}_\nu(t) \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} f(\xi_1, \ldots, \xi_N)_{|\xi_1 = g_1(t), \ldots, \xi_N = g_N(t)} \end{aligned}$$
>
> Spezialfall: $\dot{V}\left(\vec{x}(t)\right) = \dot{\vec{x}}(t) \cdot \operatorname{grad} V\left(\vec{x}(t)\right)$

Man nennt die holonomen Nebenbedingungen (1.1) ***skleronom*** ('starr gesetzlich'), falls die S_j (sich so wählen lassen, daß sie) nicht explizit von der Zeit abhängen, d.h.

$$S_{j,0} = 0 \quad \text{für } j = 1, \ldots, l$$

(wie z.B. beim Modell für den starren Körper) gilt. Andernfalls (wie z.B. beim Pendel oder Doppelpendel mit zeitabhängigem Aufhängepunkt $\vec{x}_0(t)$) nennt man die Nebenbedingungen ***rheonom*** ('fließend gesetzlich').

[3] Vgl. *Äquipotentialflächen.*

[4] Sie können sich sogar spalten, wie z.B. im Falle $S(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} (x^3)^2 - (x^1)^4\theta(x^1) = 0$.

1.1.1.2 Nicht holonome Nebenbedingungen

Als ***nicht holonom*** bezeichnet man natürlich all diejenigen Nebenbedingungen, die sich **nicht** in der Form (1.1) schreiben lassen.

Beispiel: Ersetzt man beim Pendel die Stange durch einen Faden, so ergibt sich die nicht holonome[5] Nebenbedingung

$$0 \leq S_1\left(\vec{x}(t), t\right) \leq R$$

Ähnliche Beispiele:

(i) Ausschließliche Betrachtung von m_2 beim Doppelpendel.

(ii) Massenpunkt auf glatte Kugel gesetzt.

> **Vereinbarung:** Es seien stets nur solche Nebenbedingungen betrachtet, die sich — für erlaubte Anfangsbedingungen — in der Form (1.2) schreiben lassen. Dabei sollen die Bedingungen (1.2) für jeden festen Zeitpunkt eine vollständige Charakterisierung der möglichen Momentangeschwindigkeiten darstellen.[6]

Ohne (1.3) (bzw. abgeschwächte Zusatzbedingung) folgt aus (1.2) **nicht** allgemein die Holonomie der Nebenbedingungen.

Beispiel: Die Nebenbedingung[7]

$$\dot{x}^2(t)\cos\frac{x^3(t)}{\text{Einh. v. } x^3} - \dot{x}^1 \sin\frac{x^3(t)}{\text{Einh. v. } x^3} = 0\,,$$

die einem am Punkt $(x^1(t), x^2(t))$ in der Ebene in Richtung $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x^3(t)}{\text{Einh. v. } x^3}$ *rollendem Rad* entspricht, ist **nicht holonom**, obwohl von der Form (1.2).
(Beweis als Übungsaufgabe)

Auch im allgemeinen Falle nennt man die durch (1.2) beschriebenen Nebenbedingungen ***skleronom***, falls (sich die $S_{j,0}$ und $\vec{S}_{j,k}$ so wählen lassen, daß) $S_{j,0} = 0$ für $j = 1, \ldots, l$ und die $\vec{S}_{j,k}$ **nicht explizit** von t abhängen. Andernfalls nennt man die Nebenbedingungen ***rheonom***.

WS 1995/96

[5]Bzgl. der einfachen Pendelbewegung tut man natürlich auch beim Faden so, als läge die holonome Nebenbedingung $S_1\left(\vec{x}(t), t\right) = 0$ vor.

[6]Ohne diese Zusatzannahme können sich Schwierigkeiten beim Abzählen der Freiheitsgrade oder bei der Anwendung des D'ALEMBERTschen Prinzips (siehe 1.1.2.3) ergeben.

[7]Vgl. [Ham67, Nr. 37]

1.1.1.3 Virtuelle Verrückungen

Unter einer ***virtuellen Verrückung*** einer erlaubten Bewegung $\{(\vec{x}_1(t),\ldots,\vec{x}_N(t))\}_{t\in\mathbb{R}}$ des betrachteten Systems versteht man eine vom Zusatzparameter $s \in \mathbb{R}\cdot$Zeiteinh. differenzierbar abhängige Änderung der Ortsvektorfunktionen

$$\begin{array}{ccc} \vec{x}_1(t) & \mapsto & \vec{x}_1(t,s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{x}_N(t) & \mapsto & \vec{x}_N(t,s)\,, \end{array} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ccc} \vec{x}_1(t,0) & = & \vec{x}_1(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{x}_N(t,0) & = & \vec{x}_N(t)\,, \end{array} \tag{1.4}$$

die mit den Nebenbedingungen verträglich ist. Im Falle holonomer Nebenbedingungen (1.1) bedeutet letzteres

$$S_j\left(\vec{x}_1(t,s),\ldots,\vec{x}_N(t,s),t\right) = 0 \quad \forall\, t,s\,, \tag{1.5}$$

was wegen (1.4) und (1.3) äquivalent ist zu[8]

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial}{\partial s}\vec{x}_\nu(t,s)\cdot\vec{S}_{j,\nu}\left(\vec{x}_1(t,s),\ldots,\vec{x}_N(t,s),t\right) = 0 \;\text{ für } j=1,\ldots,l \text{ und bel. } s,t\,.$$

Von einer ***infinitesimalen virtuellen Verrückung*** spricht man, wenn man sich nur für die $\frac{\partial}{\partial s}\vec{x}_\nu(t,s)_{|s=0}$ interessiert. Diese sind im Falle (1.1) also durch

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial}{\partial s}\vec{x}_\nu(t,s)_{|s=0}\cdot\vec{S}_{j,\nu}\left(\vec{x}_1(t,0),\ldots,\vec{x}_N(t,0),t\right) = 0 \quad \text{für } j=1,\ldots,l \text{ und bel. } t \tag{1.6}$$

charakterisiert,[9] was man im Hinblick auf (1.4) und

$$\frac{\partial}{\partial s}\vec{x}_\nu(t,s)_{|s=0} = \lim_{\triangle s\to\infty}\frac{\vec{x}_\nu(t,\triangle s)-\vec{x}_\nu(t,0)}{\triangle s}$$

auch **formal** durch

$$\sum_{\nu=1}^{N} \delta\vec{x}_\nu(t)\cdot\vec{S}_{j,\nu}\left(\vec{x}_1(t),\ldots,\vec{x}_N(t),t\right) = 0 \quad \text{für } j=1,\ldots,l \text{ und bel. } t \tag{1.7}$$

mitteilt, wobei

$$\delta\vec{x}_\nu(t) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{x}_\nu(t,\underbrace{\mathrm{ds}}_{\text{infin.}}) - \vec{x}_\nu(t,0) \quad \text{für } \nu=1,\ldots,N \tag{1.8}$$

WS 1995/96

[8] Vgl. (1.2).

[9] Gemäß Kap. 5 d. Einf. i.d. Theor. Phys. existiert zu jeder (hinreichend gutartigen, t-abhängigen) Schar von Lösung $\left(\frac{\partial}{\partial s}\vec{x}_1(t,s)_{|s=0},\ldots,\frac{\partial}{\partial s}\vec{x}_N(t,s)_{|s=0}\right)$ von (1.6) tatsächlich eine (endliche) virtuelle Verrückung.

die 'infinitesimalen virtuellen Verrückungen' sind. Diese unterscheiden sich i.a. von den tatsächlich möglichen infinitesimalen Verrückungen $\mathrm{d}\vec{x}_\nu(t) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{x}_\nu(t+\mathrm{d}t) - \vec{x}_\nu(t)$, für die entspr. (1.2)

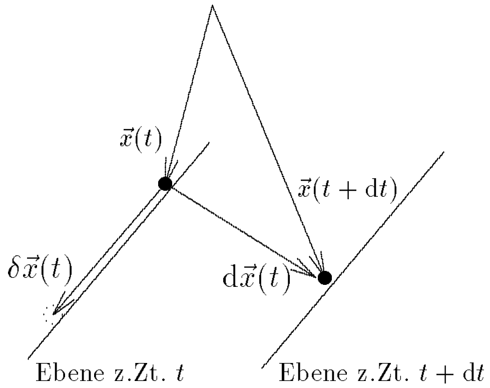
$$S_{j,0}\left(\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_N(t), t\right) + \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{d}\vec{x}_\nu(t) \cdot \vec{S}_{j,\nu}\left(\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_N(t), t\right) = 0$$

für $j = 1, \ldots, l$ bel. t gilt, womit präzise

$$S_{j,0}\left(\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_N(t), t\right) + \sum_{\nu=1}^{N} \dot{\vec{x}}_\nu(t) \cdot \vec{S}_{j,\nu}\left(\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_N(t), t\right) = 0$$

für $j = 1, \ldots, l$ und bel. t gemeint ist.

Anschauungsbeispiel (bewegte Schiefe Ebene):



Auch im **nicht holonomen** Falle[10] spricht man von ***infinitesimalen virtuellen Verrückungen***, wenn (1.7) (genauer: (1.6)) erfüllt ist.

1.1.2 Zwangskräfte und eingeprägte Kräfte

1.1.2.1 Klassifizierung

Bei den Einzelkräften, die auf das System wirken, handelt es sich jeweils entweder um 'eingeprägte Kräfte' oder um Zwangskräfte.

Diese Unterscheidung läßt sich nicht mathematisch präzisieren, sondern verlangt physikalische Einsicht.

Die ***Zwangskräfte*** sind diejenigen Kräfte, die der Beschränkungsmechanismus (Stangen, Fäden usw.) auf das System ausübt, '**um** die Einhaltung der Nebenbedingungen zu erzwingen'.

Alle übrigen auf das System einwirkenden Kräfte bezeichnet man als ***eingeprägte Kräfte***.

WS 1995/96

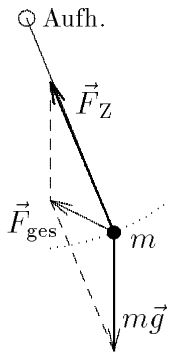
[10](1.2) vorausgesetzt!

Die **eingeprägten Kräfte werden** im mathematischen Formalismus der klassischen Mechanik als **bekannt vorausgesetzt**. Sie hängen in typischen Fällen von physikalischen Konstanten (Schwerebeschleunigung, elektrische Ladung, Reibungskraft usw.) ab.

Die **Zwangskräfte** sind dagegen i.d. Regel zunächst unbekannt. Sie **hängen** – abgesehen von den eingeprägten Kräften, durch die sie induziert werden, von den m_ν und ihren Geschwindigkeiten – **nur von der Geometrie des Beschränkungsmechanismus ab**.

1.1.2.2 Beispiele

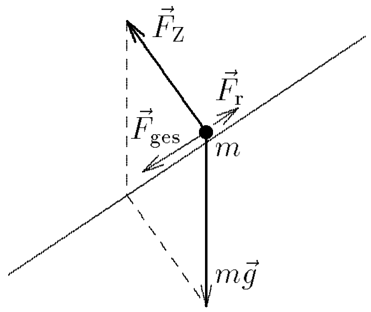
(i) Pendel:



Stange masselos!

Eine zusätzliche **Reibungskraft** (z.B. Luftwiderstand) wäre **hier** als **eingeprägte Kraft** aufzufassen!

(ii) Schiefe Ebene mit Gleitreibung:[11]

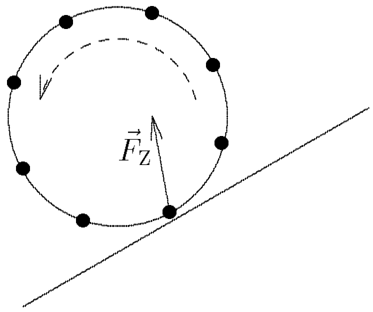


Obwohl die Reibungskraft $\vec{F}_{\mathrm{R}}$ hier (hauptsächlich) vom Beschränkungsmechanismus (Unterlage) hervorgerufen wird, ist sie auch hier als eingeprägte Kraft aufzufassen (Abhängigkeit vom Reibungskoeffizienten ρ).

WS 1995/96

[11] Vgl. [Ham67, Nr. 31]

(ii) Modell für rollenden Zylinder:



Solange rollende Bewegung vorliegt (holonome Nebenbedingung), trägt die **Haftreibung** zur **Zwangskraft** $\vec{F}_{\mathrm{Z}}$ bei, die die Unterlage auf den berührenden Massenpunkt ausübt.
Grund: Haftreibung sorgt für Einhaltung der Rollbewegung und hängt von keiner physikalischen Konstanten **direkt** ab.

1.1.2.3 D'ALEMBERTsches Prinzip

Die Bewegungsgleichungen des Systems sind natürlich die NEWTONschen:

$$\boxed{m_\nu \ddot{\vec{x}}_\nu(t) = \vec{F}_\nu^{\mathrm{e}}(t) + \vec{F}_\nu^{\mathrm{Z}}(t)} \tag{1.9}$$

wobei:

$$\begin{aligned}
m_\nu &\overset{\text{def}}{=} \text{Masse des } \nu\text{-ten Massenpunktes} \\
\vec{F}_\nu^{\mathrm{e}}(t) &\overset{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{r} \text{Vektorsumme aller } \textbf{eingeprägten Kräfte}, \\ \text{die zur Zeit } t \text{ auf } m_\nu \text{ wirken} \end{array} \right. \\
\vec{F}_\nu^{\mathrm{Z}}(t) &\overset{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{c} \text{Vektorsumme aller } \textbf{Zwangskräfte}, \\ \text{die zur Zeit } t \text{ auf } m_\nu \text{ wirken} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Während die $\vec{F}_\nu^{\mathrm{e}}(t)$ als bekannt[12] vorausgesetzt werden, weiß man von den $\vec{F}_\nu^{\mathrm{Z}}(t)$ zunächst nur, daß sie die Einhaltung der Nebenbedingungen (1.2) erzwingen. Um die $\vec{F}_\nu^{\mathrm{Z}}(t)$ eindeutig festzulegen, ist ein Zusatzkriterium notwendig:

Man **fordert**, 'daß die Zwangskräfte bei infinitesimalen virtuellen Verrückungen insgesamt keine Arbeit verrichten', d.h:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{\mathrm{Z}}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \vec{x}_\nu(t,s)_{|s=0} = 0 \quad \forall\, t \tag{1.10}$$

[12] D.h. als Funktionen von $\vec{x}_\nu(t)$, $\dot{\vec{x}}_\nu(t)$ und t.

Formal:[13]

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{\mathrm{Z}}(t) \cdot \delta\vec{x}_\nu(t) = 0 \quad \forall\, t} \tag{1.11}$$

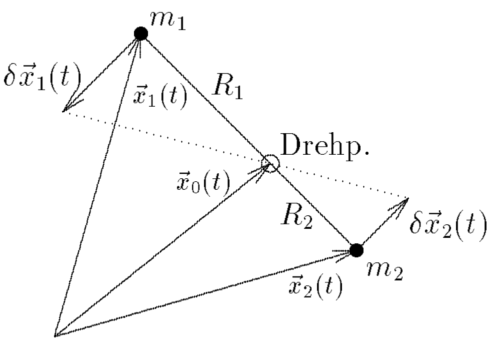
Erläuterung: Sind endliche virtuelle Verrückungen $\vec{x}_\nu(t) \mapsto \vec{x}_\nu(t,s)$ definiert und ordnet man diesen die entsprechende Zwangskräfte $\vec{F}_\nu^{\mathrm{Z}}(t,s)$ zu, so ist die Bedingung

$$\begin{aligned}\text{Arbeit der Zwangskräfte bei } \vec{x}_\nu(t) \mapsto \vec{x}_\nu(t,s) \quad &\stackrel{\text{def}}{=} \quad \textstyle\sum_{\nu=1}^{N} \int_0^s \vec{F}_\nu^{\mathrm{Z}}(t,s') \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial s'}\vec{x}_\nu(t,s')\,\mathrm{d}s'}_{\delta\vec{x}_\nu(t,s')} \\ &= \quad 0\end{aligned}$$

in der Praxis relativ plausibel. Aus ihr würde (1.10) für $\vec{F}_\nu^{\mathrm{Z}}(t) = \vec{F}_\nu^{\mathrm{Z}}(t,0)$ sofort folgen.

Bedingung (1.11) (genauer: (1.10)) ist die naheliegende Verallgemeinerung der Bedingung, daß $\vec{F}_{\mathrm{Z}}$ beim Pendel parallel zur Pendelstange bzw. bei der schiefen Ebene[14] senkrecht zur Ebene zeigt.[15]

Beispiel:



Hier ist[16]

$$(1.7) \iff \begin{cases} R_2\delta\vec{x}_1(t) = -R_1\delta\vec{x}_2(t) \\ 0 = \delta\vec{x}_1(t)\cdot(\vec{x}_1(t) - \vec{x}_0(t)) \end{cases}$$

und daher

$$\begin{aligned}(1.11) \quad &\iff \quad 0 = \left(R_1\vec{F}_1^{\mathrm{Z}}(t) - R_2\vec{F}_2^{\mathrm{Z}}(t)\right)\cdot\delta\vec{x}_1(t) \\ &\iff \quad 0 = \text{Gesamtdrehmoment (bzgl. } \vec{x}_0(t)\text{) der Zwangskräfte}\,,\end{aligned}$$

obwohl die Arbeit der **Einzel**kräfte von Null verschieden ist!

WS 1995/96

[13] Vgl. (1.7).

[14] Die Pendelaufhängung (der masselosen Pendelstange) bzw. die schiefe Ebene (mit konstanter Flächennormalen) dürfen beliebig bewegt sein!

[15] Eine entsprechend anschauliche Interpretation von (1.11) für das Modell eines rollenden Zylinders ist wohl kaum möglich.

[16] In Abschnitt 1.1.3.2 wird dies detailliert begründet; siehe (1.17).

Aufgrund von (1.9) ist (1.11) äquivalent zum

Prinzip von D'ALEMBERT***:***

$$(1.9) \quad \Longrightarrow \quad 0 = \sum_{\nu=1}^{N} \Big(m_\nu \ddot{\vec{x}}_\nu(t) - \vec{F}^{\mathrm{e}}_\nu(t) \Big) \cdot \delta \vec{x}_\nu(t) \tag{1.12}$$

für bel. infin. virt. Verrück.

(1.12) steht für

$$0 = \sum_{\nu=1}^{N} \Big(m_\nu \ddot{\vec{x}}_\nu(t) - \vec{F}^{\mathrm{e}}_\nu(t) \Big) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \vec{x}_\nu(t,s)_{|_{s=0}} \tag{1.13}$$

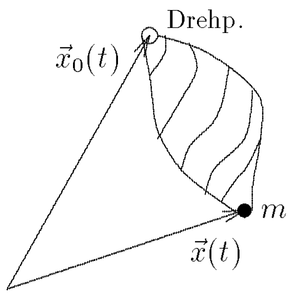
(vgl. (1.7)).

In der Praxis legt das D'ALEMBERTsche Prinzip (**nicht** dagegen (1.11) **ohne** (1.9)) in Kombination mit den Nebenbedingungen (1.2) bereits den Bewegungsablauf zu vorgegebenen $\vec{F}^{\mathrm{e}}_\nu(t)$ und erlaubten Anfangsbedingungen fest. Die $\vec{F}^{\mathrm{Z}}_\nu(t)$ folgen dann aus den NEWTONschen Gleichungen (1.9).

Es sei betont, daß das D'ALEMBERTsche Prinzip **nicht beweisbar** ist, sondern diejenigen Systeme kennzeichnet, die sich mit den üblichen Methoden der Theoretischen Mechanik behandeln lassen!

Es bleibt dem Geschick des Physikers überlassen, das jeweilige System so einzugrenzen und die Einteilung in eingeprägte Kräfte und Zwangskräfte so vorzunehmen, daß (1.12) gilt.

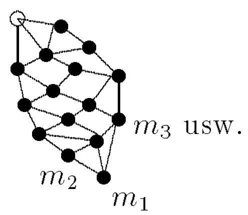
Z.B. beim ebenen Pendel mit **schwerer** Stange



gibt es folgende Möglichkeiten:

(i) Die vom Beschränkungsmechanismus zusätzlich auf den Massenpunkt rückwirkenden **Trägheitskräfte** in Form zusätzlicher eingeprägter Kräfte berücksichtigen.

(ii) **System erweitern**:



Als Spezialfall des D'ALEMBERTschen Prinzips ergibt sich eine Gleichgewichtsbedingung, das sog. ***Prinzip der virtuellen Arbeit***:

$$\ddot{\vec{x}}_\nu(t) = 0 \text{ für } \nu = 1, \ldots, N \implies 0 = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{\mathrm{e}}(t) \cdot \delta\vec{x}_\nu(t) \tag{1.14}$$

Anmerkungen:

(i) Für rheonome Systeme ist

$$\ddot{\vec{x}}_\nu(t) = 0 \text{ für } \nu = 1, \ldots, N$$

i.d. Regel **nicht** möglich.

(ii) **Falls** (1.2) und (1.13) den Bewegungsablauf **eindeutig** bestimmen und $\ddot{\vec{x}}_\nu(t) = 0$ mit den Nebenbedingungen verträglich ist, dann gilt in (1.14) sogar '$\iff$'.

1.1.3 Das Grundproblem

1.1.3.1 Zusammenfassung

Man betrachtet Systeme von N Massenpunkten mit Ortsvektoren $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_N(t)$, die **Nebenbedingungen** der Form

$$\boxed{S_{j,0}\mathrm{d}t + \sum_{\nu=1}^{N} \vec{S}_{j,\nu} \cdot \mathrm{d}\vec{x}_\nu = 0 \text{ für } j = 1, \ldots, l}$$

(genauer siehe (1.2)) genügen.

Die Kräfte, die auf die Massenpunkte wirken, teilt man so in eingeprägte Kräfte und in Zwangskräfte auf, daß das D'ALEMBERT**sche Prinzip** gilt:[17]

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{N} \vec{S}_{j,\nu} \cdot \delta\vec{x}_\nu = 0 \text{ für } j = 1, \ldots, l \\ &\implies \sum_{\nu=1}^{N} \left(m_\nu \ddot{\vec{x}}_\nu - \vec{F}_\nu^{\mathrm{e}}\right) \cdot \delta\vec{x}_\nu = 0 \text{ für tats. Bewegungsabl.} \end{aligned}}$$

Man hofft, daß die Nebenbedingungen zusammen mit dem D'ALEMBERTschen Prinzip – **bei bekannten** $\boldsymbol{\vec{S}_\nu^{\mathrm{e}}(t)} = \vec{S}_\nu^{\mathrm{e}}\left(\vec{x}_\nu(t), \dot{\vec{x}}_\nu(t), t\right)$ und erlaubten Anfangsbedingungen – auf eindeutig lösbare Bewegungsgleichungen führen (siehe 1.2.2.2).

WS 1995/96

[17] Vgl. (1.7) und (1.12); genauer: (1.6) und (1.13).

Die Zwangskräfte lassen sich dann aus den NEWTONschen **Gleichungen**

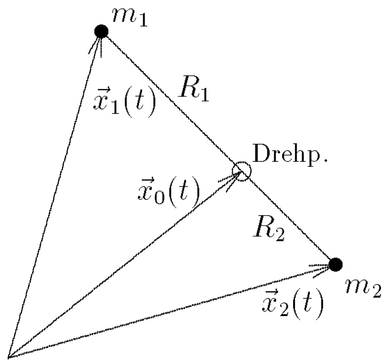
$$\boxed{m_\nu \ddot{\vec{x}}_\nu = \vec{F}^{\mathrm{e}}_\nu + \vec{F}^{\mathrm{Z}}_\nu}$$

(vgl. (1.9)) bestimmen. Für diese gilt dann automatisch

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{N} \vec{S}_{j,\nu} \cdot \delta\vec{x}_\nu = 0 \text{ für } j = 1,\ldots,l \Longrightarrow \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}^{\mathrm{Z}}_\nu \cdot \delta\vec{x}_\nu = 0}$$

(vgl. (1.10)/(1.11)).

1.1.3.2 Beispiel (wie zu (1.11))



Die Nebenbedingungen sind:

$$\vec{x}_2(t) - \vec{x}_0(t) = -R_2 \frac{\vec{x}_1(t) - \vec{x}_0(t)}{R_1}\,, \quad \left\|\frac{\vec{x}_1(t) - \vec{x}_0(t)}{R_1}\right\| = 1 \tag{1.15}$$

Dem entspricht (1.1) mit:

$$\begin{aligned}
&N = 2\,, \quad l = 4\\
&S_j\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t\right) = \left(x_1^j - x_0^j(t)\right) R_2 + \left(x_2^j - x_0^j(t)\right) R_1 \quad \text{ für } j = 1,2,3\\
&S_4\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t\right) = {R_1}^2 - \|\vec{x}_1 - \vec{x}_0(t)\|^2
\end{aligned}$$

Mit (1.3) folgt daraus

$$\begin{aligned}
S_{j,0}\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t\right) &= -(R_1 + R_2)\,\dot{x}_0^j(t) \quad \text{ für } j = 1,2,3\\
S_{4,0}\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t\right) &= 2\dot{\vec{x}}_0(t) \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_0(t))\\
\left(\vec{S}_{j,1}\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t\right)\right)_k &= \delta_{jk} R_2 \quad \text{ für } j = 1,2,3\\
\left(\vec{S}_{j,2}\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t\right)\right)_k &= \delta_{jk} R_1 \quad \text{ für } j = 1,2,3\\
\vec{S}_{4,1}\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t\right) &= -2\left(\vec{x}_1 - \vec{x}_0(t)\right) \vec{S}_{4,2}\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t\right) = 0
\end{aligned}$$

und damit lautet die **infinitesimale Form** (1.2) der Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} -(R_1+R_2)\dot{\vec{x}}_0 \mathrm{d}t + R_2 \mathrm{d}\vec{x}_1 + R_1 \mathrm{d}\vec{x}_2 &= 0 \\ \dot{\vec{x}}_0 \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_0)\,\mathrm{d}t - (\vec{x}_1 - \vec{x}_0)\cdot \mathrm{d}\vec{x}_1 &= 0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Die **infinitesimalen virtuellen Verrückungen** (1.7) sind

$$\begin{aligned} R_2 \delta\vec{x}_1 + R_1 \delta\vec{x}_2 &= 0 \\ -2\,(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)\cdot\delta\vec{x}_1 &= 0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

und das D'Alembertsche **Prinzip** lautet:

$$(1.17) \Longrightarrow 0 = \left(m_1 \ddot{\vec{x}}_1 - \vec{F}_1^{\mathrm{e}} - \frac{R_2}{R_1}\left(m_2\ddot{\vec{x}}_2 - \vec{F}_2^{\mathrm{e}}\right)\right)\cdot\delta\vec{x}_1 \tag{1.18}$$

Mit

$$\vec{\xi}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \vec{x}_1(t) - \vec{x}_0(t) \tag{1.19}$$

wird (1.16) äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_2 - \dot{\vec{x}}_0 &= -\tfrac{R_2}{R_1}\dot{\vec{\xi}} \\ \vec{\xi}\cdot\dot{\vec{\xi}} &= 0 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Unter Voraussetzung von (1.16) (bzw. (1.20)) wird (1.18) äquivalent zu

$$(1.17) \Longrightarrow 0 = \left(m_1\ddot{\vec{\xi}} + m_1\ddot{\vec{x}}_0 - \vec{F}_1^{\mathrm{e}} + \frac{R_2}{R_1}\vec{F}_2^{\mathrm{e}} + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 m_2\ddot{\vec{\xi}} - \frac{R_2}{R_1}m_2\ddot{\vec{x}}_0\right)\cdot\delta\vec{x}_1$$

und damit zu:

$$\left.\begin{array}{l} (1.17) \Longrightarrow \left(\mu\ddot{\vec{\xi}} - \vec{F}\right)\cdot\delta\vec{x}_1 = 0 \\ \text{wobei:} \quad \begin{array}{rcl} \mu & \stackrel{\mathrm{def}}{=} & m_1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 m_2 \\ \vec{F} & \stackrel{\mathrm{def}}{=} & \vec{F}_1^{\mathrm{e}} - \frac{R_2}{R_1}\vec{F}_2^{\mathrm{e}} - \left(m_1 - \frac{R_2}{R_1}m_2\right)\ddot{\vec{x}}_0 \end{array} \end{array}\right\} \tag{1.21}$$

Proben:

(i) physikalische Dimension,

(ii) Vertauschen von 1 mit 2,

(iii) Spezialfall $R_2 = 0$,

(iv) $m_2 = 0 = \vec{F}_2^{\mathrm{e}}$.

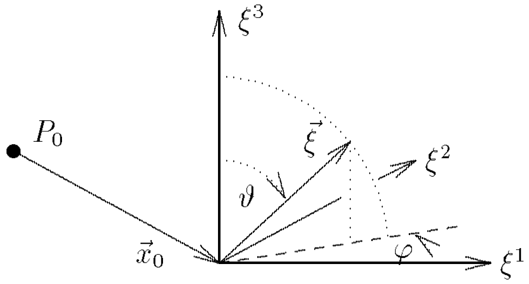
Problem (entspr. 1.1.3.1):

Was folgt aus (1.20) und (1.21) für erlaubte Anfangsbedingungen?

Für erlaubte Anfangsbedingungen ist (1.20) äquivalent zu (1.15).[18] Damit lautet das **Problem:**

Was folgt aus (1.15) und (1.21) (mit Definition (1.19))?

Dazu **Kugelkoordinaten** bzgl. $\vec{x}_0$ einführen (vgl. [L95, Abschn. 4.3.2]):



(Richtungen der ξ^j-Achsen zeitlich konstant)

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{\xi}}{R_1} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\,\cos\varphi \\ \sin\vartheta\,\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} , \quad \vec{e}_\vartheta = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\,\cos\varphi \\ \cos\vartheta\,\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}$$
$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_r = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ Orthonormalbasis!
Einzige Einschränkung an $\delta\vec{x}_1$ gem. (1.17):

$$\vec{e}_r \cdot \delta\vec{x}_1 = 0 .$$

Mit (1.21) ergeben sich daraus die **Bewegungsgleichungen** (für $\vartheta(t), \varphi(t)$):[19]

$$\begin{aligned} \left(\mu\ddot{\vec{\xi}} - \vec{F}\right) \cdot \vec{e}_\vartheta &= 0 , \\ \left(\mu\ddot{\vec{\xi}} - \vec{F}\right) \cdot \vec{e}_\varphi &= 0 . \end{aligned} \tag{1.22}$$

Um die eindeutige Lösbarkeit von (1.22) zu erkennen, wollen wir sie explizit aufschreiben. Dazu beachten wir zunächst, daß die Beziehungen

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r &= \dot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\vec{e}_r + \dot\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_r = \dot\vartheta\vec{e}_\vartheta + \dot\varphi\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi , \\ \ddot{\vec{e}}_r &= \ddot\vartheta\vec{e}_\vartheta + \left(\ddot\varphi\sin\vartheta + \dot\varphi\dot\vartheta\cos\vartheta\right)\vec{e}_\varphi + \dot\vartheta\dot{\vec{e}}_\vartheta + \dot\varphi\sin\vartheta\,\dot{\vec{e}}_\varphi , \\ \vec{e}_\varphi \cdot \dot{\vec{e}}_\vartheta &= -\dot{\vec{e}}_\varphi \cdot \vec{e}_\vartheta = \dot\varphi\cos\vartheta . \end{aligned}$$

WS 1995/96

[18]D.h.: (1.20) $\Longleftrightarrow$ ((1.15) für $t = t_0 \Longrightarrow$ (1.15) $\forall\, t$) .
[19]Lösungen von (1.22) erfüllen natürlich (1.16) und (1.18)!

und damit
$$\begin{aligned}\ddot{\vec{e}}_r \cdot \vec{e}_\vartheta &= \ddot\vartheta - \dot\varphi^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\,,\\ \ddot{\vec{e}}_r \cdot \vec{e}_\varphi &= \ddot\varphi \sin\vartheta + 2\dot\varphi\dot\vartheta\cos\vartheta\end{aligned}$$

gelten. Nach Multiplikation mit R_1 lauten also die Bewegungsgleichungen (1.22) explizit:[20]

$$\begin{aligned}\left(R_1^2 m_1 + R_2^2 m_2\right)\left(\ddot\vartheta - \dot\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta\right) &= \left(R_1\vec{F}_1^{\mathrm{e}} - R_2\vec{F}_2^{\mathrm{e}} - \left(R_1 m_1 - R_2 m_2\right)\ddot{\vec{x}}_0\right)\cdot\vec{e}_\vartheta\,,\\ \left(R_1^2 m_1 + R_2^2 m_2\right)\left(\ddot\varphi\sin\vartheta + 2\dot\varphi\dot\vartheta\cos\vartheta\right) &= \left(R_1\vec{F}_1^{\mathrm{e}} - R_2\vec{F}_2^{\mathrm{e}} - \left(R_1 m_1 - R_2 m_2\right)\ddot{\vec{x}}_0\right)\cdot\vec{e}_\varphi\,.\end{aligned}\tag{1.23}$$

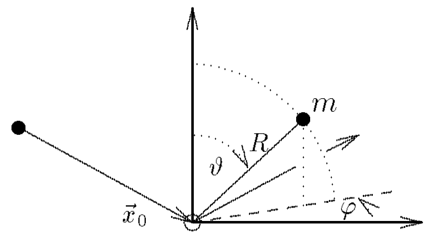
Dies sind zwei gutartige, gekoppelte, gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung. Gemäß Kap. 5 der Einf. i.d. Theor. Phys. können also schließen:

Das Anfangswertproblem besitzt eine eindeutige Lösung.

Anmerkungen:

(i) Entsprechend (1.23) lauten also die Bewegungsgleichungen für das einfache sphärische Pendel ($R_2 = 0\,,\ m_1 = m\,,\ \vec{F}_1^{\mathrm{e}} = \vec{F}$):

$$\begin{aligned}mR\left(\ddot\vartheta - \dot\varphi^2\sin\vartheta\cos\vartheta\right) &= \left(\vec{F} - m\ddot{\vec{x}}_0\right)\cdot\vec{e}_\vartheta\,,\\ mR\left(\ddot\varphi\sin\vartheta + 2\dot\varphi^2\dot\vartheta\cos\vartheta\right) &= \left(\vec{F} - m\ddot{\vec{x}}_0\right)\cdot\vec{e}_\varphi\,.\end{aligned}$$



Gewöhnlich wird nur der Spezialfall

$$\vartheta = \pi/2\,,\quad \left(\vec{F} - m\ddot{\vec{x}}_0\right)\cdot\vec{e}_\varphi = f(\varphi)$$

behandelt, für den dann

$$mR\ddot\varphi = f(\varphi)$$

gilt.

(ii) Im Falle $m_1 = m_2\frac{R_2}{R_1}$ hat nach (1.23) die Bewegungsgleichung des Aufhängepunktes plausiblerweise keinen Einfluß auf $\vec{\xi}(t)$.

WS 1995/96

[20]Man mache die üblichen Proben. Z.B. muß der Austausch der Indizes 1,2 der Ersetzung von ϑ durch $\pi - \vartheta$ entsprechen.

(iii) Hätte man die **Nebenbedingung** in der Form (1.1) **mit** $l = 3$ und

$$\begin{aligned} S_j\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t\right) &\stackrel{\text{def}}{=} R_j^2 - \left|\vec{x}_j - \vec{x}_0(t)\right|^2 \quad \text{für } j = 1, 2\,, \\ S_3\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t\right) &\stackrel{\text{def}}{=} \left(R_1 + R_2\right)^2 - \left|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\right|^2 \end{aligned}$$

geschrieben, hätte sich für (1.7)

$$\begin{aligned} (\vec{x}_\nu - \vec{x}_0) \cdot \delta\vec{x}_\nu = 0 \quad \text{für } \nu = 1, 2\,, \\ (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \cdot (\delta\vec{x}_1 - \delta\vec{x}_2) = 0 \end{aligned}$$

statt (1.23) ergeben.
Das wäre aber offensichtlich keine **vollständige Charakterisierung der infinitesimalen virtuellen Verrückungen** (z.B. würde nicht $\delta\vec{x}_2 = -\frac{R_2}{R_1}\delta\vec{x}_1$ folgen)!

(iv) Ein systematisches Verfahren zur Auswertung von Nebenbedingungen und D'ALEMBERTschem Prinzip wird in Abschn. 1.2 entwickelt.

1.1.3.3 Wichtige Ergänzung

Um das D'ALEMBERTsche Prinzip – wie in 1.1.3.1 und 1.1.3.2 angenommen und allgemein üblich – in der Form

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{N} \vec{S}_{j,\nu} \cdot \delta\vec{x}_\nu = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, l \\ &\Longrightarrow \text{ für tats. Bewegungsablauf:} \quad \sum_{\nu=1}^{N} \left(m_\nu \ddot{\vec{x}}_\nu - \vec{F}_\nu^{\text{e}}\right) \cdot \delta\vec{x} = 0 \end{aligned}} \tag{1.24}$$

anwenden zu können, muß man darauf achten, daß (1.7) (bzw. (1.6)) für jeden Zeitpunkt eine **vollständige** Charakterisierung der Menge aller infinitesimalen virtuellen Verrückungen darstellt.

> **Vereinbarung:** Um Äquivalenz von (1.12) und (1.24) zu garantieren, sei stets vorausgesetzt, daß die $\vec{S}_{j,0}$ und $\vec{s}_{j,\nu}$ in (1.2) so gewählt seien, daß für jeden festen Zeitpunkt $t = \hat{t}$ und jede Momentankonfiguration $\left(\vec{x}_1(\hat{t}), \dots, \vec{x}_N(\hat{t})\right)$ die mit den Nebenbedingungen verträglichen Momentangeschwindigkeiten $\left(\dot{\vec{x}}_1(\hat{t}), \dots, \dot{\vec{x}}_N(\hat{t})\right)$ durch (1.2) vollständig charakterisiert sind.

Anmerkungen:

(i) Daß die Vereinbarung tatsächlich die Äquivalenz von (1.12) und (1.24) garantiert, erkennt man aus

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{(\delta\vec{x}_1,\dots,\delta\vec{x}_N)}{\|(\delta\vec{x}_1,\dots,\delta\vec{x}_N)\|} : \delta\vec{x}_1,\dots,\delta\vec{x}_N \text{ infin. virt. Verrückung}\right\}\\ &= \lim_{\lambda\to\infty}\left\{\frac{\left(\dot{\vec{x}}_1,\dots\dot{\vec{x}}_N\right)}{\left\|\left(\dot{\vec{x}}_1,\dots\dot{\vec{x}}_N\right)\right\|} : \left(\dot{\vec{x}}_1,\dots\dot{\vec{x}}_N\right) \text{ erlaubt und } \left\|\left(\dot{\vec{x}}_1,\dots\dot{\vec{x}}_N\right)\right\| > \lambda\right\}.\end{aligned}$$

(ii) Die Vereinbarung setzt eine untere Schranke für die Zahl l der Beschränkungsgleichungen in (1.2);[21]z.B. $l \geq 6-2 = 4$ für das Beispiel aus 1.1.3.2.[22]

1.2 LAGRANGE-Formalismus

1.2.1 Generalisierte Koordinaten

1.2.1.1 Allgemeine Beschreibung

Es sei angenommen, daß 'gutartige' Funktionen

$$\vec{x}_\nu(q^1,\dots,q^n,t)\,,\quad \nu = 1,\dots,N$$

und

$$q^\nu\left(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N,t\right)\;;\quad \nu = 1,\dots,n$$

mit 'geeigneten' Definitionsbereichen existieren, für die gilt:

$$\boxed{\boxed{\begin{array}{l}\text{Falls } \vec{x}_1(t),\dots,\vec{x}_N(t) \text{ mit Nebenbedingungen verträglich :}\\ \quad\vec{x}_\nu(t) = \vec{x}_\nu\left(q^1(t),\dots,q^n(t),t\right) \quad \text{für } \nu = 1,\dots,N\\ \quad\Longleftrightarrow q^\nu(t) = q^\nu\left(\vec{x}_1(t),\dots,\vec{x}_N(t),t\right) \quad \text{für } \nu = 1,\dots,n\,.\end{array}}} \tag{1.25}$$

Dann bezeichnet man die $q^\nu(\vec{x}_1(t),\dots,\vec{x}_N(t),t)$ als ***generalisierte Koordinaten*** des Systems zur Zeit t (mit der Momentankonfiguration $(\vec{x}_1(t),\dots,\vec{x}_N(t),t)$).

Den erlaubten Anfangswerten

$$\vec{x}_1(t_0),\dots,\vec{x}_N(t_0)$$

für die karthesischen Koordinatenfunktionen $\vec{x}_\nu(t)$ sind dann eineindeutig erlaubte Anfangswerte

$$q^1(t_0),\dots,q^n(t_0)$$

WS 1995/96

[21]Vgl. Anmerkung (i) zu (1.1).

[22]Vgl. Anmerkung (iii) von Abschn. 1.1.3.2.

für die generalisierten Koordinaten zugeordnet.

Der Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten $\dot{\vec{x}}_\nu$ und den ***generalisierten Geschwindigkeiten*** $\dot{q}^\nu$ ist nach (1.25) für erlaubte Bahnkurven $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_N(t)$ gegeben durch

$$\boxed{\dot{q}^\nu(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} q^\nu(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N, t) + \sum_{\mu=1}^{N} \dot{\vec{x}}_\mu(t) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}_\mu} q^\nu(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N, t) \right)_{|\vec{x}_\rho = \vec{x}_\rho(t)}} \tag{1.26}$$

und

$$\boxed{\dot{\vec{x}}_\nu(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{x}_\nu(q^1, \ldots, q^n, t) + \sum_{\mu=1}^{n} \dot{q}^\mu(t) \frac{\partial}{\partial q^\mu} \vec{x}_\nu(q^1, \ldots, q^n, t) \right)_{|q_\rho = q_\rho(t)}} \tag{1.27}$$

Damit wird (1.2) für erlaubte Anfangswerte $q^1(t_0), \ldots, q^n(t_0)$ äquivalent zu:

$$\boxed{\begin{aligned}
&0 = a_{j,0}\left(q^1(t), \ldots, q^n(t), t\right) + \sum_{\nu=1}^{n} a_{j,\nu}\left(q^1(t), \ldots, q^n(t), t\right) \dot{q}^\nu(t) \quad \text{für } j = 1, \ldots, l\,, \\
&\text{wobei :} \\
&\quad a_{j,0}\left(q^1, \ldots, q^n, t\right) \\
&\quad \stackrel{\text{def}}{=} S_{j,0}\left(\vec{x}_1(q^1, \ldots, q^n, t), \ldots, \vec{x}_N(q^1, \ldots, q^n, t), t\right) \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{N} \vec{S}_{j,\nu}\left(\vec{x}_1(q^1, \ldots, q^n, t), \ldots, \vec{x}_N(q^1, \ldots, q^n, t), t\right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{x}_\nu(q^1, \ldots, q^n, t)\,, \\
&\quad a_{j,\nu}\left(q^1, \ldots, q^n, t\right) \\
&\quad \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mu=1}^{N} \vec{S}_{j,\mu}\left(\vec{x}_1(q^1, \ldots, q^n, t), \ldots, \vec{x}_N(q^1, \ldots, q^n, t), t\right) \cdot \frac{\partial}{\partial q^\nu} \vec{x}_\mu(q^1, \ldots, q^n, t)\,;
\end{aligned}} \tag{1.28}$$

bzw. formal:

$$\boxed{\boxed{a_{j,o}\mathrm{d}t + \sum_{\nu=1}^{n} a_{j,\nu}\mathrm{d}q^\nu = 0 \quad \text{für } j = 1, \ldots, l\,.}} \tag{1.29}$$

Mithilfe der generalisierten Koordinatenfunktionen $q^\nu(t)$ lassen sich also die mit den Nebenbedingungen verträglichen Bewegungen **vollständig** durch (1.29) (als Forderung für **alle** t) und Angabe der erlaubten Anfangskonfigurationen charakterisieren. Dabei stellt (1.29), zu einem **festen** Zeitpunkt t betrachtet, gemäß Vereinbarung von Abschnitt 1.1.3.3 eine vollständige Charakterisierung der zur gegebenen Orts-Momentankonfiguration $(q^1(t), \ldots, q^n(t))$ erlaubten generalisierten Geschwindigkeits-Momentankonfigurationen $(\dot{q}^1(t), \ldots, \dot{q}^n(t))$ dar.

Anmerkungen:

(i) Für das folgende ist es ohne Belang, ob die $a_{j,\nu}$ von der in (1.28) angegebenen Form sind.

(ii) In der Praxis bestimmt man geeignete Bedingungsgleichungen (1.29) direkt am System, nicht erst über (1.2).

Aus (1.25) folgt

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{für virtuelle Verrückungen } \vec{x}(t) \to \vec{x}(t,s):\\ \quad \vec{x}_\nu(t,s) = \vec{x}_\nu\left(q^1(t,s),\ldots,q^n(t,s),t\right) \quad \text{für } \nu = 1,\ldots,N \\ \quad \Longleftrightarrow q^\nu(t,s) = q^\nu\left(\vec{x}_1(t,s),\ldots,\vec{x}_N(t,s),t\right) \quad \text{für } \nu = 1,\ldots,n\,.\end{array}} \tag{1.30}$$

Den virtuellen Verrückungen der karthesischen Koordinaten bei holonomen Nebenbedingungen entsprechen also eineindeutig virtuelle Verrückungen $q^\nu(t) \to q^\nu(t,s)$ der verallgemeinerten Koordinaten, wobei der Zusammenhang zwischen den entsprechenden infinitesimalen virtuellen Verrückungen[23] durch

$$\boxed{\delta\vec{x}_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \delta q^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu}\vec{x}_\nu\,,} \tag{1.31}$$

$$\delta q^\nu = \sum_{\mu=1}^{N} \delta\vec{x}_\mu \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}_\mu} q^\nu \tag{1.32}$$

gegeben ist. Direkt sind die infinitesimalen virtuellen Verrückungen der generalisierten Koordinaten für jeden **festen** Zeitpunkt vollständig bestimmt durch:[24]

$$\boxed{\boxed{0 = \sum_{\nu=1}^{n} a_{j,\nu}\left(q^1(t),\ldots,q^n(t),t\right)\delta q^\nu(t) \quad \text{für } j = 1,\ldots,l\,.}} \tag{1.33}$$

Die Nebenbedingungen sind genau dann **holonom**, wenn sie sich mithilfe der gewählten generalisierten Koordinaten in der Form

$$\boxed{\boxed{a_j\left(q^1(t),\ldots,q^n(t),t\right) = 0 \quad \text{für } j = 1,\ldots l_q \text{ und bel. } t}} \tag{1.34}$$

ausdrücken lassen.

Im Falle

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{x}_\nu(q^1,\ldots,q^n,t) = 0 \quad \text{für } \nu = 1,\ldots,N$$

[23] Entsprechend (1.8) steht $\delta q^\nu(t)$ formal für $\frac{\partial}{\partial s}q^\nu(t,s)_{|_{s=0}}\mathrm{d}s$.

[24] Für $a_{j,\nu}$ gemäß (1.28) ist das eine direkte Folge von (1.7) und (1.31)/(1.32).

sind die Nebenbedingungen genau dann **skleronom**, wenn sie sich mithilfe geeigneter $a_{j,\nu}$ durch

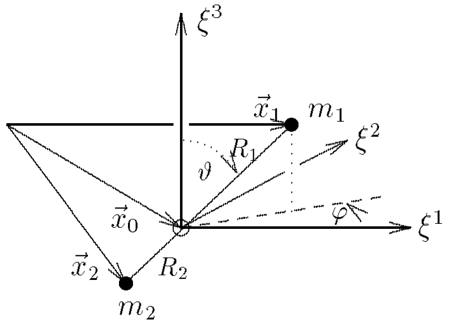
$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{n} a_{j,\nu}\left(q^1(t),\ldots,q^n(t)\right)\dot q^\nu(t)=0} \tag{1.35}$$

und Angabe der erlaubten Anfangskonfigurationen vollständig charakterisieren lassen.

Als (lokale) ***Zahl der Freiheitsgrade*** eines **holononomen** Systems bezeichnet man die Mindestzahl n (lokal) benötigter generalisierter Koordinaten.

1.2.1.2 Standardbeispiel

Wir betrachten wieder die gleiche Situation wie in Abschnitt 1.1.3.2.



Hier gilt (1.25) mit:[25]

$$\left.\begin{aligned}
q^1 &= \vartheta(\vec x_1,\vec x_2,t)=\arccos\left(\tfrac{x_1^3-x_0^3(t)}{|\vec x_1-\vec x_0(t)|}\right)\in(0,\pi)\,,\\
q^2 &= \varphi(\vec x_1,\vec x_2,t)=\arctan\left(\tfrac{x_1^2-x_0^2(t)}{\left|x_1^1-x_0^1(t)\right|}\right)\in[-\pi,+\pi)\,,\\
q^3 &= r(\vec x_1,\vec x_2,t)=|\vec x_1-\vec x_0(t)|\,,
\end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

$$\left.\begin{aligned}
\vec x_1(r,\vartheta,\varphi,t) &= \vec x_0(t)+r\begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}\,,\\
\vec x_2(r,\vartheta,\varphi,t) &= \vec x_0(t)-\tfrac{R_2}{R_1}+r\begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{1.37}$$

Die erlaubten Anfangskonfigurationen zur Zeit $t=t_0$ sind

$$\left.\begin{aligned}
\vec x_1(t_0) &= \vec x_0(t_0)+R_1\tfrac{\vec e}{|\vec e|}\,,\\
\vec x_2(t_0) &= \vec x_0(t_0)+R_2\tfrac{\vec e}{|\vec e|}
\end{aligned}\right\}\ \text{mit bel. } \vec e\neq 0\,,$$

[25]Solange $\vec x_1(t)-x_0(t)$ nicht ein Vielfaches von $\vec e_3$ ist.

bzw.

$$\left.\begin{array}{l} q^1(t_0) = \vartheta(t_0) \in (0,\pi)\,, \\ q^2(t_0) = \varphi(t_0) \in [-\pi,+\pi)\,, \end{array}\right\} \text{ reine Konvention}$$
$$q^3(t_0) = r(t_0) = R_1\,. \qquad \text{(phys. Einschr.)}$$

<u>Generalisierte Geschwindigkeiten:</u>

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot r(t) & = & \dot r\left(\vec x_1(t), \vec x_2(t). \dot{\vec x}_1(t), \dot{\vec x}_2(t), t\right) \\ & \underset{(1.26)}{=} & \left(\dot{\vec x}_1(t) - \dot{\vec x}_0(t)\right) \cdot \frac{\vec x_1(t)-\vec x_0(t)}{|\vec x_1(t)-\vec x_0(t)|}\,, \\ \multicolumn{3}{l}{\dot\vartheta(t), \dot\varphi(t) \text{ komplizierter.}} \end{array}\right\} \tag{1.38}$$

<u>Gewöhnliche Geschwindigkeiten:</u>

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{\vec x}_1(t) & = & \dot{\vec x}_1\left(\vartheta(t), \varphi(t), r(t), \dot\vartheta(t), \dot\phi(t), \dot r(t), t\right) \\ & \underset{(1.27)}{=} & \dot{\vec x}_0(t) + \dot r(t)\vec e_r\left(\vartheta(t), \varphi(t)\right) + r(t)\dot\vartheta(t)\vec e_\vartheta\left(\vartheta(t), \varphi(t)\right) \\ & & \qquad + r(t)\sin\vartheta(t)\dot\varphi(t)\vec e_\varphi\left(\vartheta(t), \varphi(t)\right)\,, \\ \dot{\vec x}_2(t) & = & \dot{\vec x}_2\left(\vartheta(t), \varphi(t), r(t), \dot\vartheta(t), \dot\phi(t), \dot r(t), t\right) \\ & \underset{(1.27)}{=} & \dot{\vec x}_0(t) - \frac{R_2}{R_1}\left(\dot{\vec x}_1\left(\vartheta(t), \varphi(t), r(t), \dot\vartheta(t), \dot\phi(t), \dot r(t), t\right) - \dot{\vec x}_0\right)\,. \end{array}\right\} \tag{1.39}$$

Mit den $S_{j,0}$ und $\vec S_{j,\nu}$ aus 1.1.3.2 ergibt sich für die $a_{j,\nu}$ in (1.28):

$$\begin{array}{rcl} a_{j,0}(\vartheta,\varphi,r,t) & = & -(R_1+R_2)\dot x_0^j(t) + R_2\frac{\partial}{\partial t}x_1^j(\vartheta,\varphi,r,t) + \frac{\partial}{\partial t}x_2^j(\vartheta,\varphi,r,t) \\ & & \hfill \text{für } j = 1,2,3\,, \\ a_{4,0}(\vartheta,\varphi,r,t) & = & 2\dot{\vec x}_0(t)\cdot\left(\vec x_1(\vartheta,\varphi,r,t) - \vec x_0(t)\right) \\ & & \hfill -2\left(\vec x_1(\vartheta,\varphi,r,t) - \vec x_0(t)\right)\frac{\partial}{\partial t}\vec x_1(\vartheta,\varphi,r,t)\,, \\ a_{j,\nu}(\vartheta,\varphi,r,t) & = & R_2\frac{\partial}{\partial q^\nu}x_1^j(\vartheta,\varphi,r,t) + R_1\frac{\partial}{\partial q^\nu}x_1^j(\vartheta,\varphi,r,t) \quad \text{für } j,\nu = 1,2,3\,, \\ a_{4,\nu}(\vartheta,\varphi,r,t) & = & -2\left(\vec x_1(\vartheta,\varphi,r,t) - \vec x_0(t)\right)\frac{\partial}{\partial q^\nu}\vec x_1(\vartheta,\varphi,r,t) \quad \text{für } \nu = 1,2,3\,. \end{array}$$

Mit

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \frac{\partial}{\partial t}\vec x_1(\vartheta,\varphi,r,t) & = & \frac{\partial}{\partial t}\vec x_2(\vartheta,\varphi,r,t) & = & \dot{\vec x}_0(t)\,, \\ \frac{\partial}{\partial r}\vec x_1(\vartheta,\varphi,r,t) & = & -\frac{R_1}{R_2}\frac{\partial}{\partial r}\vec x_2(\vartheta,\varphi,r,t) & = & \vec e_r(\vartheta,\varphi)\,, \\ \frac{\partial}{\partial\vartheta}\vec x_1(\vartheta,\varphi,r,t) & = & -\frac{R_1}{R_2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\vec x_2(\vartheta,\varphi,r,t) & = & r\vec e_\vartheta(\vartheta,\varphi)\,, \\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\vec x_1(\vartheta,\varphi,r,t) & = & -\frac{R_1}{R_2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec x_2(\vartheta,\varphi,r,t) & = & r\sin\vartheta\,\vec e_\varphi(\vartheta,\varphi) \end{array}\right\} \tag{1.40}$$

folgt daraus

$$a_{j,\nu}(\vartheta,\varphi,r,t) = \begin{cases} -2r & \text{für } j = 4,\ \nu = 3\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gemäß (1.28) lauten also die **Nebenbedingungen (1.29):**

$$\boxed{-2r(t)\dot r(t) = 0\,.} \tag{1.41}$$

(1.41) ist **direkt** als vollständige Charakterisierung der erlaubten generalisierten Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt t bei gegebenem $r(t) > 0$ erkennbar (vgl. Anmerkung zu (1.29)) ! Entsprechende vollständige Charakterisierung (1.33) der **infinitesimalen virtuellen Verrückungen der generalisierten Koordinaten:**

$$\boxed{\delta r = 0} \tag{1.42}$$

($\delta\vartheta$ und $\delta\varphi$ also uneingeschränkt).

In der r, ϑ, φ-Beschreibung erkennt man die **Holonomität** der Nebenbedingungen daran, daß (1.41) für erlaubte Anfangskonfigurationen offensichtlich äquivalent zu (1.34) mit $l_q = 1$ und $a_1(\vartheta, \varphi, r, t) = R_1 - r$ ist.

Trotzdem[26] sind die Nebenbedingungen nur dann skleronom, wenn $\dot{\vec{x}}_0 = \frac{\partial}{\partial t}\vec{x}_1 = \frac{\partial}{\partial t}\vec{x}_2 = 0$.

Das System hat zwei Freiheitsgrade, da man auch ohne r auskommen kann.

1.2.1.3 Differentialgeometrische Anmerkungen

$$\mathcal{M}_t \stackrel{\text{def}}{=} \{(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t)) : \text{ Momentankonf. einer erlaubten Bewegung z.Zt. } t\}$$

bezeichnet man als ***Konfigurationsraum*** des Systems zur Zeit t.

> Folgender **Spezialfall** (hololome Nebenbedingungen !) sei betrachtet:
> Es existieren (jeweils lokal) generalisierte Koordinaten $q^1, \dots, q^n$, die – von Bereichsfragen abgesehen – keinen Einschränkungen unterliegen (d.h. alle $a_{j,\nu} = 0$ in (1.28)).

Dann stellt $\mathcal{M}_t$ **eine n-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{3N}$** dar, für die (U_t, φ_t) mit

$$U_t \stackrel{\text{def}}{=} \{(\vec{x}_1(q^1, \dots, q^n, t), \dots, \vec{x}_N(q^1, \dots, q^n, t)) : (q^1, \dots, q^n) \in \text{erlaubt. Bereich}\},$$
$$\varphi_t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \stackrel{\text{def}}{=} (q^1(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t), \dots, q^n(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)) \quad \text{für } (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \in U_t$$

eine (jeweils lokale) ***Karte*** darstellt.

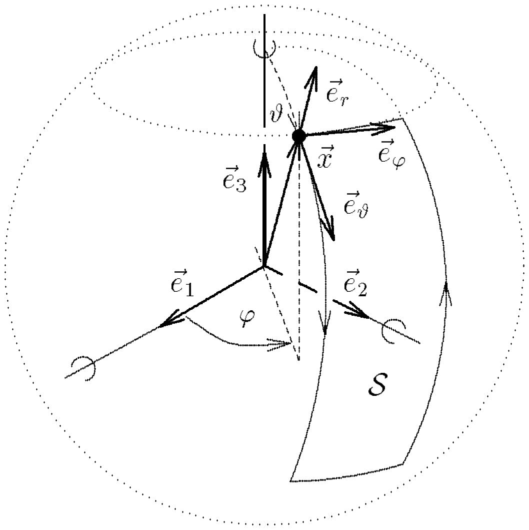
Die Menge aller **infinitesimalen virtuellen Verrückungen** $(\delta\vec{x}_1(t), \dots, \delta\vec{x}_N(t))$ (genauer: $\left(\frac{\partial}{\partial s}\vec{x}_1(t,s), \dots, \frac{\partial}{\partial s}\vec{x}_N(t,s)\right)_{|s=0}$) stimmt dann mit der Menge aller **Tangentenvektoren** (von $\mathcal{M}_t$ an der Stelle $(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t))$) überein.

Die Dimension des Vektorraumes der infinitesimalen Verrückungen (= Zahl der Freiheitsgrade im Infinitesimalen) stimmt daher mit n überein. Außerdem ist n die Mindestzahl benötigter generalisierter Koordinaten; d.h.:

$$n \text{ Zahl der Freiheitsgrade (im Endlichen)}$$

[26]Man hätte in der Definition von $\vartheta(\dots)$ und $\varphi(\dots)$ $\vec{x}_2$ statt $\vec{x}_0(t)$ verwenden können, um $\frac{\partial}{\partial t}\vartheta = \frac{\partial}{\partial t}\varphi = 0$ zu erreichen !

Anschaulich für sphärisches Pendel:



$r = |\vec{x}|$, $\vec{n} = \vec{e}_r$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_t &= \text{Oberfläche der Kugel mit Radius } R \\
& \quad\ \text{(Pendellänge) und Mittelpunkt } \vec{x}_0(t)\,, \\
U_t &= \mathcal{M}_t \ \textbf{(mit Ausnahme der Pole)}\,, \\
\varphi_t(\vec{x}) &= (\vartheta(t), \varphi(t))\ ,
\end{aligned}
$$

$\{$infinit. virt. Verrück. zZt. $t\} = \{$Linearkomb. von $\vec{e}_\vartheta\,(\vartheta(t), \varphi(t))$ u. $\vec{e}_\varphi\,(\vartheta(t), \varphi(t))\}$.

Für $\dot{\vec{x}}_0(t) \neq 0$ ist $\dot{\vec{x}}(t)$ i.a. **nicht** mehr tangential zu $\mathcal{M}_t$.

1.2.2 LAGRANGE-Gleichungen

1.2.2.1 Konsequenzen der NEWTONschen Gleichungen

Im Hinblick auf das D'ALEMBERTsche Prinzip ist es von Interesse, daß aus den NEWTONschen Gleichungen (1.30) unmittelbar

$$
\textbf{für tats. Bew.:}\quad \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\vec{x}}_\nu \cdot \frac{\partial}{\partial q^\mu} \vec{x}_\nu = Q^{\mathrm{e}}_\mu + Q^{\mathrm{Z}}_\mu \quad \text{für } \mu = 1, \ldots, n \tag{1.43}
$$

folgt, wobei

$$
\boxed{Q^{\mathrm{e}}_\mu \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}^{\mathrm{e}}_\nu \cdot \tfrac{\partial}{\partial q^\mu} \vec{x}_\nu\ , \quad Q^{\mathrm{Z}}_\mu \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}^{\mathrm{Z}}_\nu \cdot \tfrac{\partial}{\partial q^\mu} \vec{x}_\nu} \tag{1.44}
$$

die sog. ***generalisierten Kräfte*** sind.

Warnungen:

(i) Die Q_μ haben i.a. **nicht** mehr die physikalische Dimension einer Kraft.

(ii) Die Zuordnung $\left(\vec{F}_1^{\mathrm{e}}, \ldots, \vec{F}_N^{\mathrm{e}}\right) \longrightarrow (Q_1^{\mathrm{e}}, \ldots, Q_n^{\mathrm{e}})$ ist i.a. **nicht** rückeindeutig.

In der Schreibweise[27]

$$\begin{aligned}&\dot{f}\left(q^1(t), \ldots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \ldots, \dot{q}^n(t), t\right)\\ &\stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{\partial}{\partial t} f\left(q^1(t), \ldots, q^n(t), t\right) + \textstyle\sum_{\nu=1}^n \dot{q}^\nu \tfrac{\partial}{\partial q^\nu} f\left(q^1(t), \ldots, q^n(t), t\right)\end{aligned}$$

gilt allgemein

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial q^\nu} f = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\nu} \dot{f}\,, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q^\nu} f = \frac{\partial}{\partial q^\nu} \dot{f}} \tag{1.45}$$

und somit

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{x}}_\nu \cdot \tfrac{\partial}{\partial q^\mu} \vec{x}_\nu &= \tfrac{d}{dt}\Big(\dot{\vec{x}}_\nu \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial q^\mu}\vec{x}_\nu}_{\underset{(1.45)}{=} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\mu}\dot{\vec{x}}_\nu} \Big) - \Big(\dot{\vec{x}}_\nu \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q^\mu}\vec{x}_\nu}_{\underset{(1.45)}{=} \frac{\partial}{\partial q^\mu}\dot{\vec{x}}_\nu} \Big)\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial}{\partial \dot{q}^\mu} \|\dot{\vec{x}}_\nu\|^2 - \tfrac{\partial}{\partial q^\mu}\|\dot{\vec{x}}_\nu\|^2 \right)\end{aligned}$$

Mit der **kinetischen Energie**

$$\boxed{\begin{aligned}&T\left(q^1(t), \ldots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \ldots, \dot{q}^n(t), t\right)\\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^N \frac{m_\nu}{2} \left|\dot{\vec{x}}_\nu\left(q^1(t), \ldots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \ldots, \dot{q}^n(t), t\right)\right|^2\end{aligned}} \tag{1.46}$$

des Systems zum Zeitpunkt t gilt also

$$\sum_{\nu=1}^N m_\nu \ddot{\vec{x}}_\nu \cdot \frac{\partial}{\partial q^\mu}\vec{x}_\nu = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^\mu} T - \frac{\partial}{\partial q^\mu} T \tag{1.47}$$

Gemäß (1.47) ist (1.43) äquivalent zu

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^\mu} T - \frac{\partial}{\partial q^\mu} T = Q_\mu^{\mathrm{e}} + Q_\mu^{\mathrm{Z}} \text{ für tats. Bewegung u. } \mu = 1, \ldots, n} \tag{1.48}$$

WS 1995/96

[27] Hierdurch ist

$$f(t) = f\left(q^1(t), \ldots, q^n(t), t\right) \Longrightarrow \dot{f}(t) = \dot{f}\left(q^1(t), \ldots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \ldots, \dot{q}^n(t), t\right)$$

garantiert.

1.2.2.2 Auswertung des D'ALEMBERTschen Prinzips

Nach (1.31)/(1.32), (1.44) und (1.47) ergibt sich in generalisierten Koordinaten folgende äquivalente Formulierung für das

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{\textit{Prinzip von}}\ \text{D'ALEMBERT}\textbf{\textit{:}}\\ \quad\displaystyle\sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial}{\partial\dot{q}^{\mu}}T-\frac{\partial}{\partial q^{\mu}}T-Q^{\mathrm{e}}_{\mu}\right)\delta q^{\mu}=0\\ \text{für tats. Bewegung u. bel. infin. virt. Verrück.}\end{array}} \tag{1.49}$$

Anmerkung: In Übereinstimmung mit (1.48) lautet die entspr. Formulierung von (1.11):

$$\sum_{\mu=1}^{n} Q^{\mathrm{Z}}_{\mu}\delta q^{\mu}=0\,.$$

Da (1.33), d.h.

$$\begin{pmatrix} a_{j,1}\\ \vdots \\ a_{j,n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\delta q^{1}\\ \vdots\\ \delta q^{n}\end{pmatrix}=0\quad\text{für } j=1,\ldots,l_q\,,$$

für jeden Zeitpunkt eine **vollständige** Charakterisierung der infinitesimalen virtuellen Verrückungen $(\delta q^1,\ldots,\delta q^n)$ darstellt (nach Vereinbarung in 1.1.3.3), ist (1.49) äquivalent zu folgender Aussage:

Für die tatsächliche Bewegung steht

$$\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial}{\partial\dot{q}^{1}}T-\frac{\partial}{\partial q^{1}}T-Q^{\mathrm{e}}_{1}\\ \vdots\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial}{\partial\dot{q}^{n}}T-\frac{\partial}{\partial q^{n}}T-Q^{\mathrm{e}}_{n}\end{pmatrix} \tag{1.50}$$

(in $\mathbb{R}^n$) zu jedem Zeitpunkt senkrecht auf all denjenigen Vektoren, die senkrecht auf allen Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_{j,1}\\ \vdots \\ a_{j,n}\end{pmatrix}\ ;\ j=1,\ldots,l_q\,, \tag{1.51}$$

stehen.

Äquivalent dazu:

(1.50) ist zu jedem Zeitpunkt eine Linearkombination der Vektoren (1.51).

Daraus folgt:

> Das D'ALEMBERTsche Prinzip ist äquivalent zu folgender Aussage:
>
> Zum tatsächlichen Bewegungsablauf des Systems existieren sog. LAGRANGE-***Parameter*** (i.a. nicht eindeutig), d.h. Funktionen $\lambda_1(1), \ldots, \lambda_{l_q}(t)$ mit:
>
> $$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\mu} T - \frac{\partial}{\partial q^\mu} T = Q^{\mathrm{e}}_\mu + \sum_{j=1}^{l_q} \lambda_j a_{j,\mu} \quad \text{für } \mu = 1, \ldots, n\,.} \tag{1.52}$$

Aus (1.52) und (1.48) folgt sofort[28]

$$\boxed{Q^{\mathrm{Z}}_\mu = \sum_{j=1}^{l_q} \lambda_j a_{j,\mu} \quad \text{für } \mu = 1, \ldots, n\,.} \tag{1.53}$$

Die Gleichungen (1.52) bezeichnet man als

- LAGRANGE-***Gleichungen I. Art:***

  $$\text{falls } n = 3N \quad \textbf{und} \text{ nicht alle } a_{j,\mu} = 0\,,$$

- LAGRANGE-***Gleichungen II. Art:***

  $$\text{falls alle } a_{j,\mu} = 0 \quad (n = \text{ Zahl der Freiheitsgrade})\,,$$

- LAGRANGE-***Gleichungen vom gemischten Typ:*** sonst.

Anmerkungen:

(i) **Sämtliche LAGRANGE-Gleichungen** zum vorgegebenen Problem (System + eingeprägte Kräfte) sind – sofern die entspr. generalisierten Koordinaten existieren – **für erlaubte Bewegungen** offensichtlich **äquivalent**.

(ii) Für die **LAGRANGE-Gleichungen II. Art** (n gewöhnliche Differentialgleichungen für n unbekannte Funktionen $q^1(t), \ldots, q^n(t)$) läßt sich relativ leicht zeigen (Übungsaufgabe), daß das zugehörige Anfangswertproblem **lokal eindeutig lösbar** ist, falls

$$\vec{F}^{\mathrm{e}}_\nu(t) = \vec{F}^{\mathrm{e}}_\nu \left(q^1(t), \ldots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \ldots, \dot{q}^n(t), t \right) \quad \text{hinr. gutartig}$$

für $\nu = 1, \ldots, n$.

WS 1995/96

[28] Die Dimension des Vektorraumes der Zwangskräfte wächst mit der Zahl der Nebenbedingungen.

1.2.2.3 Verallgemeinerte Potentiale

Wenn sich die generalisierten Kräfte $Q^{\mathrm{e}}_\nu(q^1,\dots,q^n,\dot q^1,\dots,\dot q^\nu,t)$ gemäß[29]

$$\boxed{Q^{\mathrm{e}}_\nu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial U}{\partial \dot q^\nu} - \frac{\partial U}{\partial q^\nu}} \tag{1.54}$$

aus einem sog. ***verallgemeinerten Potential*** $U(q^1,\dots,q^n,\dot q^1,\dots,\dot q^\nu,t)$ ergeben, lassen sich die LAGRANGE-Gleichungen (1.52) durch Einführung der sog. LAGRANGE-***Funktion***

$$\boxed{\boxed{L \stackrel{\mathrm{def}}{=} T - U}} \tag{1.55}$$

in der Form

$$\boxed{\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot q^\nu} - \frac{\partial L}{\partial q^\nu} = \sum_{j=1}^{l_q} \lambda_j a_{j,\nu} \\ \quad \text{für tats. Bewegung u. } \nu = 1,\dots,n\end{array}}} \tag{1.56}$$

schreiben.

(i) U (und somit L) ist nicht eindeutig; denn z.B. ist nach (1.45) mit U auch $\hat U \stackrel{\mathrm{def}}{=} U + \dot f$ – mit bel. $f(q^1,\dots,\dot q^n,t)$ – ein verallgemeinertes Potential.

(ii) Im allgemeinen Falle wird nur ein Teil der eingeprägten Kräfte erfaßt, die übrigen bleiben dann rechts stehen.

Gewöhnlich sucht man zunächst in karthesischen Koordinaten für die eingeprägten Kräfte $\vec F^{\mathrm{e}}_\nu\left(\vec x_1,\dots,\vec x_N,\dot{\vec x}_1,\dots,\dot{\vec x}_N,t\right)$ ein verallgemeinertes Potential $U(\vec x_1,\dots,\dot{\vec x}_N,t)$:

$$\boxed{\boxed{\vec F^{\mathrm{e}}_\nu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec\nabla_{\dot{\vec x}_\nu} U\right) - \vec\nabla_{\vec x_\nu} U\,.}} \tag{1.57}$$

Dann gilt (1.54) mit

$$\boxed{\begin{array}{l} U(q^1,\dots,q^n,\dot q^1,\dots,\dot q^\nu,t) \\ = U\left(\vec x_1(q^1,\dots,q^n,t),\dots,\dot{\vec x}_N(q^1,\dots,q^n,\dot q^1,\dots,\dot q^n,t),t\right)\,. \end{array}} \tag{1.58}$$

WS 1995/96

[29] man beachte, daß ein verallgemeinertes Potential stets von der Form

$$U(q^1,\dots,q^n,\dot q^1,\dots,\dot q^n,t) = f(q^1,\dots,q^n,t) + \sum_{\nu=1}^{n} \dot q^\nu g_\nu(q^1,\dots,q^n,t)$$

sein muß, damit die Q^{e}_ν nicht von den Beschleunigungen abhängen.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\tfrac{\partial U}{\partial \dot q^\nu} - \tfrac{\partial U}{\partial q^\nu} \\
&= \sum_{\mu=1}^N \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \big(\underbrace{\frac{\partial \dot{\vec x}_\mu}{\partial \dot q^\nu}}_{\underset{(1.55)}{=} \frac{\partial \vec x_\mu}{\partial q^\nu}} \cdot \vec\nabla_{\dot{\vec x}_\mu} U \big) - \tfrac{\partial \vec x_\mu}{\partial q^\nu} \vec\nabla_{\vec x_\mu} U - \underbrace{\frac{\partial \dot{\vec x}_\mu}{\partial q^\nu}}_{\underset{(1.55)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial \vec x_\mu}{\partial q^\nu}} \cdot \vec\nabla_{\dot{\vec x}_\mu} U \right) \\
&\underset{\text{Produktregel}}{=} \sum_{\mu=1}^N \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \cdot \vec\nabla_{\dot{\vec x}_\mu} U - \vec\nabla_{\vec x_\mu} U \right) \cdot \tfrac{\partial \vec x_\mu}{\partial q^\nu} \\
&\underset{(1.44)}{\leadsto} \text{Behauptung.} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Beispiele:

(i) Für gewöhnliche Potentialkräfte gilt

$$U = U(\vec x_1, \dots, \vec x_N, t)\,.$$

Im Falle $\frac{\partial}{\partial t} U = 0$ sind diese Kräfte **konservativ**, d.h. es gilt

$$T + U = \text{const.} \quad \text{für Lösungen von (1.56)}\,,$$

falls die Nebenbedingungen **skleronom** sind[30] (Energiesatz; vgl. auch Schluß von 1.2.2.4).

(ii) Im Falle linearer Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten der Form

$$U(\vec x_1, \dots, \dot{\vec x}_N, t) = -\sum_{\nu=1}^N \frac{e_\nu}{c} \vec A(\vec x_\nu, t) \cdot \dot{\vec x}_\nu$$

folgt mit (1.57)

$$
\begin{aligned}
\tfrac{c}{e_\nu} \vec F^{\mathrm{e}}_\nu(\vec x_1, \dots, \dot{\vec x}_N, t) &= -\dot{\vec A}(\vec x_\nu, \dot{\vec x}_\nu, t) + \vec\nabla_{\vec x_\nu} \left(\dot{\vec x}_\nu \cdot \vec A(\vec x_\nu, t) \right) \\
&= -\tfrac{\partial}{\partial t} \vec A(\vec x_\nu, t) - \left(\dot{\vec x}_\nu \cdot \vec\nabla_{\vec x_\nu} \right) \vec A(\vec x_\nu, t) \\
&\qquad + \vec\nabla_{\vec x_\nu} \left(\dot{\vec x}_\nu \cdot \vec A(\vec x_\nu, t) \right) \\
&\underset{\text{Entw.-Satz}}{=} -\tfrac{\partial}{\partial t} \vec A(\vec x_\nu, t) + \dot{\vec x}_\nu \times \operatorname{rot} \vec A(\vec x_\nu, t)\,.
\end{aligned}
$$

(iii) Der ν-te Massenpunkt besitze jeweils die elektrische Ladung e_ν. Dann übt das elektromagnetische Feld

$$
\begin{aligned}
\vec E(\vec x, t) &= -\operatorname{grad} \Phi(\vec x, t) - \tfrac{1}{c} \tfrac{\partial}{\partial t} \vec A(\vec x, t) \\
\vec B(\vec x, t) &= \operatorname{rot} \vec A(\vec x, t)
\end{aligned}
$$

WS 1995/96

[30] Im Falle rheonomer Nebenbedingungen die Energieerhaltung i.a. **nicht**, die Zwangskräfte können Arbeit leisten.

(im GAUSSschen Maßsystem) jeweils die Kraft

$$\begin{aligned}
\vec{F}_\nu(\vec{x}_\nu, \dot{\vec{x}}_\nu, t) &= e_\nu \left(\vec{E}(\vec{x}_\nu, t) + \tfrac{1}{c}\dot{\vec{x}}_\nu \times \vec{B}(\vec{x}_\nu, t) \right) \\
&= -e_\nu \operatorname{grad} \Phi(\vec{x}_\nu, t) - \tfrac{e_\nu}{c} \left(\tfrac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{x}_\nu, t) + \dot{\vec{x}}_\nu \times \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{x}_\nu, t) \right)
\end{aligned}$$

aus. Nach (ii) gilt also

$$\vec{F}_\nu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \vec{\nabla}_{\dot{\vec{x}}_\nu} U - \vec{\nabla}_{\vec{x}_\nu} U$$

mit

$$U(\vec{x}_1, \ldots, \dot{\vec{x}}_N, t) = \sum_{\nu=1}^{N} e_\nu \left(\Phi(\vec{x}_\nu, t) - \frac{1}{c}\dot{\vec{x}}_\nu \cdot \vec{A}(\vec{x}_\nu, t) \right) .$$

1.2.2.4 Erhaltungssätze

Die $q^1, \ldots, q^n$ seien (von den üblichen Bereichsfragen abgesehen) uneingeschränkt[31] und es mögen die LAGRANGE-Gleichungen (1.56) gelten, d.h.:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial L}{\partial q^\nu} = 0 \quad \text{für tats. Bewegung u. } \nu = 1, \ldots, n\,.} \tag{1.59}$$

Dann bezeichnet man

$$\boxed{p_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\nu} L} \tag{1.60}$$

als den zu q^ν ***kanonisch konjugierten Impuls***.[32]

Die ν-te generalisierte Koordinate bezeichnet man als ***zyklisch***, falls $\frac{\partial}{\partial q^\nu} L = 0$. Damit ergibt sich aus (1.59) unmittelbar folgender

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{Erhaltungssatz:} \\ q^\nu \text{ zyklisch} \Longleftrightarrow (\dot{p}_\nu = 0 \text{ für alle Lösungen von (1.59)}) \,.\end{array}} \tag{1.61}$$

Warnung: Die Definition z.B. von p_1 in (1.60) hängt i.a. auch von der Wahl der $q^2, \ldots, q^n$ ab !

Beispiele für kanonisch konjugierte Impulse:

WS 1995/96

[31] D.h.: Alle $a_{j,\nu} = 0$, n =Zahl der Freiheitsgrade, Nebenbedingungen holonom.

[32] I.a. hat p_ν natürlich **nicht** die physikalische Dimension eines gewöhnlichen Impulses.

(i) Sei

$$U(q^1,\dots,\dot q^n,t) = V(q^1,\dots,q^n,t) - \sum_{\nu=1}^N \frac{e_\nu}{c}\vec A\left(\vec x_\nu(q^1,\dots,q^n,t),t\right)\cdot\dot{\vec x}_\nu(q^1,\dots,\dot q^n,t)$$

und sei $\vec e$ ein konstanter Vektor mit

$$\vec x_\nu(q^1+\Delta q^1,q^2,\dots,q^n,t) = \vec x_\nu(q^1,\dots,q^n,t) + \Delta q^1\,\vec e$$

für $\nu = 1,\dots,n$ und bel. Δq^1. Dann ist der zu q^1 kanonisch konjugierte Impuls

$$p_1 = \sum_{\nu=1}^N (\underbrace{m_\nu \dot{\vec x}_\nu}_{\text{mech. Impuls v. m}_\nu} + \frac{e_\nu}{c}\vec A(\vec x_\nu,t))\cdot\vec e\,.$$

Beweis: Die Behauptung folgt mit

$$\frac{\partial}{\partial\dot q^1}T = \sum_{\nu=1}^N m_\nu\dot{\vec x}_\nu\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial\dot q^1}\dot{\vec x}_\nu}_{\underset{(1.45)}{=}\frac{\partial\vec x_\nu}{\partial q^1}\underset{\text{Vorauss.}}{=}\vec e}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial\dot q^1}U = -\sum_{\nu=1}^N\frac{e_\nu}{c}\vec A(\vec x_\nu,t)\cdot\frac{\partial}{\partial\dot q^1}\dot{\vec x}_\nu$$

mit (1.60) und (1.55). ∎

q^1 ist zyklisch, falls $\frac{\partial}{\partial q^1}U = 0$.

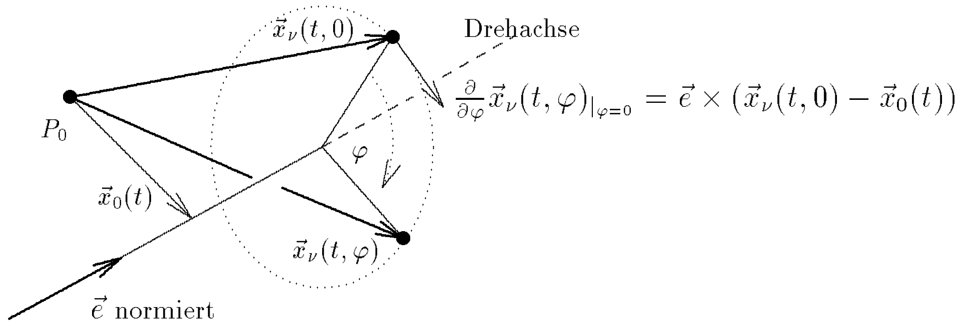
Beweis: Die Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial}{\partial q^1}T &= \textstyle\sum_{\nu=1}^N m_\nu\dot{\vec x}_\nu\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial q^1}\dot{\vec x}_\nu}_{\underset{(1.45)}{=}\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial}{\partial q^1}\vec x_\nu}_{=\vec e}}\\ &= 0\end{aligned}$$

mit (1.55). ∎

(ii) Sei U wie in (i), seien $\vec e = \text{const.}$ und $\vec x_0(t)$ beliebig vorgegeben und gelte

$$\frac{\partial}{\partial q^1}\vec x_\nu(q^1,\dots,q^n,t) = \vec e\times\left(\vec x_\nu(q^1,\dots,q^n,t) - \vec x_0(t)\right)\quad\text{für }\nu = 1,\dots,n\,.$$



Dann ist der zu q^1 kanonisch konjugierte Impuls

$$p_1 = \Big(\sum_{\nu=1}^{N} \underbrace{(\vec{x}_\nu - \vec{x}_0(t)) \times (m_\nu \dot{\vec{x}}_\nu}_{\text{mech. Drehimp. von } m_\nu \text{ bzgl. } \vec{x}_0(t)} + \frac{e_\nu}{c}\vec{A}(\vec{x}_\nu, t))\Big) \cdot \vec{e}\,.$$

Beweis: Wie oben folgt

$$p_1 = \sum_{\nu=1}^{N} \Big(m_\nu \dot{\vec{x}}_\nu + \frac{e_\nu}{c}\vec{A}(\vec{x}_\nu, t)\Big) \cdot (\vec{e} \times (\vec{x}_\nu - \vec{x}_0(t)))$$

und daraus aufgrund der Zyklizität des Spat-Produktes die Behauptung. ∎

Für $\vec{\boldsymbol{x}}_\circ = \text{const.}$ ist q^1 genau dann zyklisch, wenn $\frac{\partial}{\partial q^1}U = 0$ (Beweis als Übungsaufgabe).

Aus obigen Beispielen[33] ergeben sich folgende Spezialfälle für (1.61):

Satz 1.2.1 (Impulssatz) *Für gegebenes* $\vec{e} = \text{const.}$ *gelte (1.58) mit*

$$U = U(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = U(\vec{x}_1 + \xi\vec{e}, \dots, \vec{x}_N + \xi\vec{e}, t) \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^1\,.$$

Dann ist die $\vec{e}$*-Komponente des (mechanischen) Gesamtimpulses*

$$\vec{P} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{x}}_\nu$$

für alle Lösungungen von (1.59) zeitlich konstant, **falls** *mit* $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)$ *stets auch* $(\vec{x}_1 + \xi\vec{e}, \dots, \vec{x}_N + \xi\vec{e}, t)$ *für beliebiges* $\xi \in \mathbb{R}^1$ *mit den Nebenbedingungen verträglich ist.*

WS 1995/96

[33] Die Nebenbedingungen waren als holonom vorausgesetzt !

Satz 1.2.2 (Drehimpulssatz) *Für gegebenes* $\vec{e} = \text{const.}$ *gelte (1.58) mit*

$$U = U(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N, t) = U(\boldsymbol{D}_{\varphi\vec{e}}\,\vec{x}_1, \ldots, \boldsymbol{D}_{\varphi\vec{e}}\,\vec{x}_N, t) \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{R}^1\,,$$

wobei:

$$\boldsymbol{D}_{\varphi\vec{e}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \textit{Drehung um die } \vec{e}\textit{-Achse} \\ \textit{um den Winkel } \varphi\,|\vec{e}| \;\; \textit{(im Rechtsschraubensinn)}. \end{cases}$$

Dann ist die $\vec{e}$*-Komponente des (mechanischen) Gesamtdrehimpulses (bzgl. des gewählten Koordinatenursprungs)*

$$\vec{L} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{N} \vec{x}_\nu \times m_\nu \dot{\vec{x}}_\nu$$

für alle Lösungungen von (1.59) zeitlich konstant, **falls** *mit* $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N, t)$ *stets auch* $(\boldsymbol{D}_{\varphi\vec{e}}\,\vec{x}_1, \ldots, \boldsymbol{D}_{\varphi\vec{e}}\,\vec{x}_N, t)$ *für bel.* $\varphi \in \mathbb{R}^1$ *eine erlaubte Konfiguration ist.*

> **Anmerkung:** Eigentlich müßte man für Impuls- und Drehimpulssatz die Existenz generalisierter Koordinaten entspr. obigem Beispiel zeigen. Das ist (lokal, außer am Punkte $\vec{x}_1 = \ldots = \vec{x}_N = 0$) aber möglich, wenn überhaupt uneingeschränkte generalisierte (lokal) Koordinaten existieren.

<u>Naheliegende Frage:</u> Was folgt aus[34]

$$\frac{\partial}{\partial t} L(q^1, \ldots, \dot{q}^n, t) = 0$$

für die tatsächliche Bewegung ?

<u>Antwort:</u> Es folgt

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} L \quad &= \quad \textstyle\sum_{\nu=1}^{n} \Big(\dot{q}^\nu \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^\nu}}_{\underset{(1.59)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\nu}}_{=p_\nu}} + \ddot{q}^\nu \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\nu}}_{\underset{(1.60)}{=} p_\nu} \Big) \\ &\underset{\text{Produktr.}}{=} \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \textstyle\sum_{\nu=1}^{n} \dot{q}^\nu p_\nu \,. \end{aligned}$$

WS 1995/96

[34]Man beachte, daß die Gültigkeit von $\frac{\partial}{\partial t} L(q^1, \ldots, \dot{q}^n, t) = 0$ für bel. t **nicht** äquivalent zur Gültigkeit von $\frac{\partial}{\partial t} L(\vec{x}_1, \ldots, \dot{\vec{x}}_N, t) = 0$ für bel. t ist !

Somit gilt

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}L = 0 \Longrightarrow \dot{H} = 0 \text{ für tats. Beweg.}} \tag{1.62}$$

mit:

$$\boxed{H \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} \dot{q}^\nu p_\nu - L\,.} \tag{1.63}$$

Im Falle

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{x}_\nu = 0 \quad \text{für } \nu = 1, \ldots, N$$

gilt nach (1.27) und (1.46)

$$T = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \alpha_{\nu,\mu}(q^1, \ldots, q^n)\dot{q}^\nu \dot{q}^\mu$$

(O.B.d.A. mit $\alpha_{\nu,\mu} = \alpha_{\mu,\nu}$) und somit

$$\frac{\partial}{\partial t}T = 0 \tag{1.64}$$

sowie

$$\sum_{\nu=1}^{n} \dot{q}^\nu \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\nu}T = 2T$$

(Spezialfall des EULERschen Fundamentalsatzes). Mit (1.63), (1.60) und (1.55) folgt somit

$$\boxed{\begin{array}{rl} & H = T + U\,, \\ \text{falls:} & U = U(q^1, \ldots, q^n, t) \\ \text{und} & \frac{\partial}{\partial t}\vec{x}_\nu = 0 \text{ für } \nu = 1, \ldots, N\,, \end{array}} \tag{1.65}$$

und daraus[35] mit (1.64) der

Satz 1.2.3 (Energiesatz) *Es gelte (1.58) mit*

$$U(\vec{x}_1, \ldots, \dot{\vec{x}}_N, t) = U(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)$$

(konservative eingeprägte Kräfte !) und die Nebenbedingungen seien **skleronom**. *Dann gilt für alle Lösungen von (1.59):*

$$\begin{aligned} H &= T + U = \mathit{Energie} \\ &= \text{const.} \end{aligned}$$

WS 1995/96

[35] Für skleronome Nebenbedingungen kann man nämlich O.B.d.A. $\frac{\partial}{\partial t}\vec{x}_\nu = 0$ für $\nu = 1, \ldots, N$ voraussetzen.

Merkregel: (für Systeme mit $U = U(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)$)

(i) Translationsinvarianz des Systems
$\Longrightarrow$ Impulserhaltung (für Komp. in Transl.-Richtung).

(ii) Drehinvarianz des Systems
$\Longrightarrow$ Drehimpulserhaltung (für Komp. in Richtung d. Drehachse).

(iii) Zeittranslationsinvarianz
$\Longrightarrow$ Energieerhaltung.

1.2.3 Das Lagrange-Lösungsverfahren zum Grundproblem für eingeprägte Kräfte mit verallgemeinertem Potential

1.2.3.1 Zusammenfassung

Man sucht (lokal) geeignete Funktionen

$$\begin{array}{lll} q^\nu(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) & ; & \nu = 1, \dots, n\,, \\ \vec{x}_\nu(q^1, \dots, q^n, t) & ; & \nu = 1, \dots, N\,, \\ a_{j,\nu}(q^1, \dots, q^n, t) & ; & j = 1, \dots, l_q\,;\ \nu = 0, \dots, n\,, \end{array}$$

für die (jeweils lokal) folgende beiden Aussagen gelten:

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Falls } (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \textbf{ erlaubte Konfiguration:} \\ \quad \vec{x}_\nu = \vec{x}_\nu(q^1, \dots, q^n, t) \text{ für } \nu = 1, \dots, N \\ \quad \Longleftrightarrow q^\nu = q^\nu(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) \text{ für } \nu = 1, \dots, n \end{array}}$$

(vgl. (1.25).)

$$a_{j,0} + \sum_{\nu=1}^{n} a_{j,\nu} \dot{q}^\nu = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, l_q$$

ist für jeden Zeitpunkt (und vorgeg. erlaubte Momentankonf.) eine vollständige Charakterisierung der erlaubten $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$.

(vgl. (1.29) und Anmerkung dazu.)

Dann sucht man ein verallgemeinertes Potential U mit

$$\boxed{\vec{F}^{\mathrm{e}}_\nu(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_N, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \vec{\nabla}_{\dot{\vec{x}}_\nu} U(\vec{x}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_N, t) - \vec{\nabla}_{\vec{x}_\nu} U(\vec{x}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_N, t)}$$

(vgl. (1.57)) und bestimmt die zugehörige LAGRANGE-Funktion

$$\boxed{\begin{aligned} &L(q^1,\dots,q^n,\dot{q}^1,\dots,\dot{q}^n,t)\\ &=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{m_\nu}{2}\left\|\dot{\vec{x}}_\nu(q^1,\dots,\dot{q}^n,t)\right\|^2 - U\left(\vec{x}_1(q^1,\dots,q^n,t),\dots,\dot{\vec{x}}_N(q^1,\dots,\dot{q}^n,t),t\right)\end{aligned}}$$

(vgl. (1.55) und (1.46)) nach Berechnung der

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{\vec{x}}_\nu(q^1,\dots,q^n,\dot{q}^1,\dots,\dot{q}^n,t)\\ &=\frac{\partial}{\partial t}\vec{x}_\nu(q^1,\dots,q^n,t)+\sum_{\mu=1}^{n}\dot{q}^\mu\frac{\partial}{\partial q^\mu}\vec{x}_\nu(q^1,\dots,q^n,t)\,.\end{aligned}}$$

Die tats. Bewegung ermittelt man schließlich (lokal) durch Lösung der LAGRANGE-Gleichungen

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial}{\partial\dot{q}^\nu}L-\frac{\partial}{\partial q^\nu}L=\sum_{j=1}^{l_q}\lambda_j\,a_{j,\nu}\quad\text{für }\nu=1,\dots,n}$$

(vgl. (1.56)) zu vorgegebenen (erlaubten) Anfangswerten **unter Einhaltung der Nebenbedingung (1.29)** mithilfe geeigneter $\lambda_1(t),\dots,\lambda_{l_q}(t)$. Die verallgemeinerten Zwangskräfte

$$\boxed{Q_\nu^{\mathrm{Z}}=\sum_{\mu=1}^{N}\vec{F}_\mu^{\mathrm{Z}}\cdot\frac{\partial}{\partial q^\nu}\vec{x}_\mu}$$

(vgl. (1.44)) ergeben sich dann zu

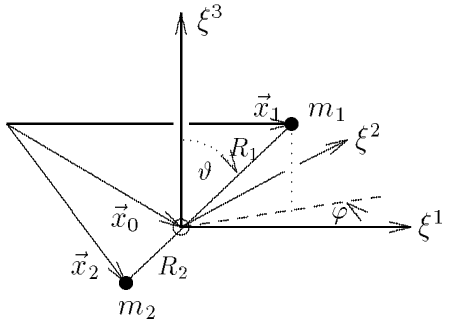
$$\boxed{Q_\nu^{\mathrm{Z}}=\sum_{j=1}^{l_q}\lambda_j\,a_{j,\nu}}$$

(vgl. (1.53)).

1.2.3.2 Standardbeispiel

Wir betrachten wieder unser Standardbeispiel entspr. 1.1.3.2 bzw. 1.2.1.2, jetzt für den **Spezialfall**

$$\left.\begin{aligned}\vec{x}_0(t)\quad&=\quad 0 &&\text{für alle } t\,,\\ \vec{F}_j^{\mathrm{e}}\quad&=\quad m_j\begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix} &&\text{für } j=1,2\,.\end{aligned}\right\}\tag{1.66}$$



Für die in 1.2.1.2 gewählten generalisierten Koordinaten $q^1 = \vartheta, q^2 = \varphi, q^3 = r$ galt:

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{x}_1 & = & r\vec{e}_r(\vartheta,\varphi)\,, \\ \vec{x}_2 & = & -\frac{R_2}{R_1}\vec{x}_1\,, \end{array}\right\} \tag{1.67}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{\vec{x}}_1 & = & \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\,\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\,, \\ \dot{\vec{x}}_2 & = & -\frac{R_2}{R_1}\dot{\vec{x}}_1\,. \end{array}\right\} \tag{1.68}$$

Die erlaubten generalisierten Geschwindigkeiten sind für jeden Zeitpunkt vollständig charakterisiert durch

$$\left.\begin{array}{r} \sum_{\nu=1}^3 a_{j,\nu}\dot{q}^\nu = 0 \quad \text{für } j = 1\,, \\ a_{1,\nu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu = 3\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases} \end{array}\right\} \tag{1.69}$$

was ja nichts anderes bedeutet, als $\dot{r} = 0$.

Wegen (1.66) gilt (1.57) mit

$$U(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \stackrel{\text{def}}{=} m_1 g x_1^3 + m_2 q x_2^3\,.$$

Mit (1.67) und (1.68) folgt daraus

$$\left.\begin{array}{rcl} L(\vartheta,\varphi,\dot{\vartheta},\dot{\varphi},\dot{r},t) & = & \frac{m_1+(R_2/R_1)^2 m_2}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) \\ & & -\left(m_1 - \frac{R_2}{R_1}m_2\right) gr\cos\vartheta\,. \end{array}\right\} \tag{1.70}$$

Nach (1.69) lauten die Lagrange-Gleichungen (1.56) (vom gemischten Typ):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} - \frac{\partial}{\partial\vartheta}L = 0\,, \tag{1.71}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial}{\partial\varphi}L = 0\,, \tag{1.72}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial\dot{r}} - \frac{\partial}{\partial r}L = \lambda \underset{(1.53)}{=} Q_r^{\mathrm{Z}}\,. \tag{1.73}$$

Diese Gleichungen sind zu erlaubten Anfangsbedingungen so zu lösen, daß die Nebenbedingungen erfüllt sind; d.h. daß

$$r = R_1\,. \tag{1.74}$$

Damit ergibt sich nach (1.70) für (1.71) explizit

$$\left\| \quad \left(R_1^2 m_1 + R_2^2 m_2\right)\left(\ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\right) - (R_1 m_1 - R_2 m_2)\, g \sin\vartheta = 0\,, \right.$$

was wegen (1.66) und $\vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}$ mit der ersten der Gleichungen (1.23) von 1.1.3.2 übereinstimmt.

Nach (1.70) ist φ **eine zyklische Koordinate**, d.h. $\frac{\partial}{\partial\varphi}L = 0$. Daher besagt (1.72), daß der zu φ kanonisch konjugierte Impuls

$$\left\| \quad p_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}} L \underset{(1.70),(1.74)}{=} \underbrace{\left(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2\right)\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}}_{=\text{3-Komp. d. Gesamtdrehimp.}} \quad \text{zeitlich konstant} \right.$$

ist.[36] Wegen (1.66) stimmt das mit der zweiten der Gleichungen (1.23) von 1.2.3.2 überein.

(1.71), (1.72) und (1.69) (bzw. (1.74)) legen die Bewegung (zu vorgegebenen, erlaubten Anfangsbedingungen) über (1.67) bereits eindeutig fest.

Die Zusatzgleichung (1.73), die aus der Verwendung der überflüssigen generalisierten Koordinate r resultiert, dient lediglich zu Berechnung der Zwangskraft[37]

$$\left| \quad Q_r^{\mathrm{Z}} \underset{(1.44)}{\stackrel{\text{def}}{=}} \left(\vec{F}_1^{\mathrm{Z}} - \frac{R_2}{R_1}\vec{F}_2^{\mathrm{Z}}\right)\cdot\vec{e}_r\,. \right.$$

Nach (1.70) und (1.74) liefert (1.73) dafür:

$$\left\| \quad Q_r^{\mathrm{Z}} = -\left(R_1 m_1 + \frac{R_2^2}{R_1} m_2\right)\left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) - \left(m_1 - \frac{R_2}{R_1} m_2\right) g\cos\vartheta\,. \right.$$

Abschließende Bemerkung: Für t-abhängiges $\vec{x}_0$ wäre die oben beschriebene Methode umständlicher als die in 1.1.3.2 angewandte.

WS 1995/96

[36]Vgl. (1.61), wo $a_{j,\nu} = 0$ vorausgesetzt war.

[37]Im Spezialfall $R_2 = 0$ stimmt sie mit der Spannung der Pendelstange überein.