Teil 9

Spezielle Relativitätstheorie

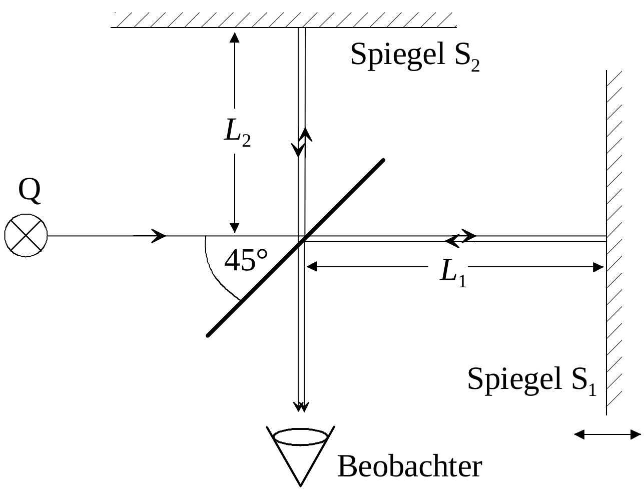
9. Spezielle Relativitätstheorie

9.1. Experiment von Michelson-Morley

Nach der klassischen Vorstellung brauchen elektromagnetische Wellen zu ihrer Ausbreitung ebenso wie Schall ein Medium. Da sich Licht aber auch durch ein materielles Vakuum ausbreitet, muß dieses Medium immateriell sein: Man nannte es Äther. Das ist zunächst nur ein Wort für das „Medium für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen“. Die „elastischen“ Eigenschaften dieses Äthers, der nur Transversalwellen erlaubt, waren nur unbefriedigend zu modellieren.
Einfachste Frage: In welchem Koordinatensystem ruht der Äther? Wie beim Schall müßte man aus der Analyse von Dopplereffekten (4.2.6) auf Relativbewegungen von Quelle, Medium und Beobachter schließen können.
Einfachste Hypothese: Auf der Erdoberfläche ist die *Änderung* der Relativbewegung zum Äther-Ruhesystem im wesentlichen durch den Umlauf um die Sonne ($30\,\mathrm{km/s}$) gegeben. Die Lichtgeschwindigkeit sollte daher von der Relativbewegung der Erde und der Richtung, in der sie gemessen wird, abhängig sein. Aufgrund der geringen Erdgeschwindigkeit gegen die Lichtgeschwindigkeit müssen sehr kleine Laufzeitunterschiede gemessen werden. Das sogenannte Michelson-Interferometer ist eine Möglichkeit, diese mit ausreichender Genauigkeit zu bestimmen.

9.1.1. Michelson-Interferometer

Zur Messung sehr kleiner Wellenlängenunterschiede bzw. Abstände verwendet man Interferometer. Ein heute noch verwendeter Typ ist das Michelson-Interferometer. Monochromatische Lichtstrahlen aus der Quelle Q werden am Strahlteiler (z.B. halbdurchlässig verspiegelte Glasplatte) in zwei Teilbündel zerlegt, die auf unterschiedlichen Wegen L_1 und L_2 laufen. Nach der Reflexion an den Spiegeln überlagern sich beide Teilbündel im Detektor.



Wenn die beiden Laufwege genau gleich sind ($L_2 = L_1$), überlagern sich beide Teilstrahlen beim Beobachter mit gleicher Phase: Konstruktive Interferenz. Wird der Spiegel S_1 um die Strecke $\lambda/4$ verschoben, dann ist der

Gangunterschied beim Beobachter $2(L_1 - L_2) = \lambda/2$: destruktive Interferenz. Die Interferenz kann als Interferenz an einer „planparallelen Luftplatte“ der Dicke $L_1 - L_2$ aufgefaßt werden. Zählt der Beobachter m Hell-Dunkel-Hell-Durchgänge bei der Änderung von L_1 um ΔL_1, so ist $2\Delta L_1 = m\lambda$. Beobachtet man mehrere tausend Durchgänge und mißt ΔL_1 mit einem Mikrometer, dann kann man die Wellenlänge λ so genau bestimmen, wie es die Mechanik des Mikrometers erlaubt. (Wenn es nur auf die Bestimmung von Wellenlängenänderungen ankommt, kann man die Genauigkeit durch „Anschlag“ erhöhen.

Vier Bemerkungen:

1. Beide Teilbündel haben beim Beobachter je eine Reflexion R und eine Transmission T beim Strahlteiler hinter sich und daher auch dann gleiche Amplituden, wenn der Strahlteiler nicht genau halbdurchlässig ist. Da aber die Intensität der Interferenzmaxima $\sim RT = (1-T)T$ ist, ergibt $T = 0{,}5$ ein maximales Signal. Man kann den zweifachen Lichtweg des Bündels 1 durch die Glasplatte durch eine Kompensatorplatte zwischen Strahlteiler und S_2 kompensieren.
2. Der maximale Gangunterschied ist durch die Kohärenzlänge begrenzt.
3. Da das Lichtbündel leicht divergent ist, sieht man in der Beobachterebene nicht gleichmäßige Helligkeit/Dunkelheit, sondern ein Ringsystem von hellen und dunklen Streifen, die mit der Änderung von L_1 oder, allgemeiner, bei Änderung der Differenz der optischen Wege ΔL_{opt} beider Teilbündel radial wandern.
4. Um die Empfindlichkeit für kleine Änderungen von ΔL_{opt} bei festem Abstand der Spiegel zu erhöhen, kann man durch leichte Neigung der Strahlen Vielfachreflexionen (n) erreichen, so daß man für den Gangunterschied $n\Delta L$ statt $2\Delta L$ erhält.

9.1.2. Durchführung des Experiments

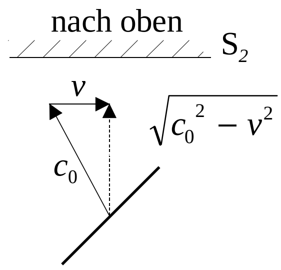
Man denke sich das Michelson-Interferometer als Ganzes drehbar und so eingestellt, daß der Lichtweg zu Spiegel S_1 parallel zur Erdgeschwindigkeit $\vec{v}$ ist. Betrachtet man das bewegte System der Erde vom ruhenden System des Äthers aus, dann läuft das Licht, das zu S_1 geht, erst mit $\vec{v}$, dann nach der Reflexion entgegen $\vec{v}$. Vom ruhenden System aus betrachtet ist die Laufzeit des Strahls 1 (parallel zur Bewegung der Erde) bei Verwendung der einfachen Addition von Geschwindigkeiten gemäß der Galilei-Transformation (2.1.4.1)

$$t_\parallel = \frac{L_1}{c_0 + v} + \frac{L_1}{c_0 - v} = \frac{2L_1/c_0}{1-(v/c_0)^2} = \frac{2L_1/c_0}{1-\beta^2}.$$

Dabei wurde die gebräuchliche Abkürzung $\beta = v/c_0$ verwendet. Für Strahl 2 (senkrecht zur Bewegung) gilt entsprechend

$$t_\perp = \frac{2L_2}{\sqrt{c_0^{\,2} - v^2}} = \frac{2L_2/c_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

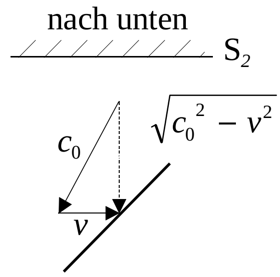
Mit $L_1 = L_2 = L$ wird die Differenz der Laufzeiten:



$$\Delta t = t_{\parallel} - t_{\perp} = \frac{2L}{c_0}\left[\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]$$

Für die Bewegung der Erde um die Sonne ist $v \approx 30\,\mathrm{km/s}$, also $\beta^2 = v^2 / c_0^2 \approx 10^{-8} << 1$, und man kann den Ausdruck annähern durch die jeweiligen Taylorentwicklungen:

$$\Delta t \approx \frac{2L}{c_0}\left[\left(1+\beta^2\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)\right] = \frac{L}{c_0}\beta^2 .$$



Dieser Laufzeitunterschied entspricht einer Wegdifferenz $\Delta L \approx c_0 \Delta t \approx L\beta^2$. Interferenzmaxima treten auf, falls $2\Delta L = m\lambda$ mit $m = 1, 2, 3, \ldots$, d.h.

$$m = 2\frac{\Delta L}{\lambda} = 2\frac{L}{\lambda}\beta^2$$

Wählt man $L = 30\,\mathrm{m}$, $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$ (gelbes Licht), so wird mit $\beta^2 = 10^{-8}$: $m = 1{,}0$. Mit dieser Dimensionierung sollte die Wegdifferenz $\Delta L = \lambda / 2$ betragen. Dreht man die Anordnung um $90°$, so gilt wieder obige Überlegung, aber die Wegdifferenz wird negativ: $\Delta L = -\lambda / 2$. Man müßte einen Hell-Dunkel-Hell-Durchgang beobachten. Obwohl im Experiment von Michelson-Morley eine Streifenverschiebung um $m = 10^{-3}$ hätte nachgewiesen werden können, wurde keine Veränderung beobachtet, die auf eine Relativbewegung von der Größe der Erdgeschwindigkeit schließen ließe[1].

9.1.3. Ergebnis und Folgerung

1. Die Vakuumlichtgeschwindigkeit auf der Erde ist unabhängig von der Relativbewegung der Erde stets gleich $c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.
2. Es gibt demnach für den Äther als Medium der Lichtausbreitung kein Ruhesystem. Damit wird der Begriff eines solchen Mediums (Ätherhypothese) hinfällig.
3. Die Konstanz bzw. Gleichheit von c_0 in jedem Koordinatensystem bedeutet, daß auch für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen jedes Inertialsystem (siehe 2.1.4.1) gleichberechtigt ist.
4. Die Konstanz bzw. Gleichheit von c_0 in jedem Koordinatensystem bedeutet andererseits, daß zumindest für die Lichtgeschwindigkeit die Addition der Geschwindigkeiten entsprechend der Galilei-Transformation (siehe 2.1.4.2) ($\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$, $t' = t$) nicht richtig ist. Es ist somit ein Transformationsgesetz zu finden, das die Konstanz von c_0 beim Übergang vom einen zum anderen Inertialsystem korrekt wiedergibt. Für die Ausbreitung einer elektromagnetischen Kugelwelle muß in beiden Inertialsystemen gelten: $\vec{x}^2 = \vec{c}_0 t^2$, und statt $(\vec{x}' - \vec{v}t)^2 = c_0^2 t^2$ im gestrichen Koordinatensystem: $\vec{x}'^2 = c_0^2 t'^2$, wobei die Möglichkeit zu berücksichtigt

[1] Michelson 1880, genauer Michelson und Morley 1887, noch genauer G. Joos 1930.

ist, daß auch die Zeitkoordinate zu transformiert wird, daß also Gleichzeitigkeit in zwei Inertialsystemen nicht unabhängig von $\vec{v}$ ist.

Einstein verallgemeinerte die Ergebnisse 3. und 1. und formulierte sie als

Postulate der speziellen Relativitätstheorie:
Postulat I: Das spezielle Relativitätsprinzip Zur Beschreibung der Naturgesetze sind alle Inertialsysteme gleichberechtigt.
Postulat II: Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen die gleiche.

Diese beiden Postulate bilden die Grundlage der speziellen Relativitätstheorie. Aus ihnen allein können alle weiteren Beziehungen abgeleitet werden.

9.2. Lorentz-Transformation

Aus den beiden obigen Postulaten ergibt sich als Transformationsvorschrift zwischen Inertialsystemen die sogenannte Lorentz-Transformation. Sie tritt an die Stelle der klassischen Galilei-Transformation.

Zur Herleitung der Transformationsformel der Lorentz-Transformation betrachten wir zwei stationäre Beobachter in den mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$ gegeneinander bewegten Koordinatensysteme S ($\vec{x}$, t) und S' ($\vec{x}'$, t'), die jeder für sich in ihren Bezugssystemen Messungen vornehmen können[2]. Wir nehmen an, daß die beiden Ursprünge zum Zeitpunkt $t = 0$ bzw. $t' = 0$ zusammenfallen und die Achsen der Koordinatensysteme parallel zueinander verlaufen[3]. Des weiteren sollen Längen und Zeiten in beiden Koordinatensystemen in den selben Einheiten gemessen werden, d.h. die beiden Beobachter messen Längen und Zeiten mit gleich konstruierten physikalischen Geräten. Diese Forderung scheint zuerst etwas pedantisch, wir werden aber sehen, daß Längen und Zeiten in der speziellen Relativitätstheorie, anders als in der Newtonschen Mechanik, keine absolute Größen mehr sind, sondern vom verwendeten Bezugssystem abhängen, daher ist es notwendig, den Meßprozeß zu konkretisieren.

Aufgrund der Gleichberechtigung der beiden Inertialsysteme (Postulat I) und der Homogenität des Raumes müssen sich für $\vec{x} \parallel \vec{v}$ die Ortskoordinaten gemäß

$$\vec{x}' = \Gamma(\vec{x} - \vec{v}t) \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{x} = \Gamma(\vec{x}' + \vec{v}t') \qquad (*)$$

mit gleichem konstanten Vorfaktor Γ transformieren. Wegen der Gleichheit von c_0 in beiden Systemen (Postulat II) erreicht ein zur Zeit $t = 0$ bzw. $t' = 0$ im Ursprung startender Lichtpuls nach der Zeit t bzw. t' den Punkt $\vec{x} = \vec{c}_0 t$ bzw. $\vec{x}' = \vec{c}_0 t'$, das ergibt in (*) eingesetzt:

$$\vec{c}_0 t' = \Gamma(\vec{c}_0 t - \vec{v}t) \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{c}_0 t = \Gamma(\vec{c}_0 t' + \vec{v}t') .$$

---

[2] Die Geschwindigkeit v von S gegen S' mißt der Beobachter im System S.
[3] Diese Forderungen sind keine Einschränkungen: Durch Verschieben und Drehung der Koordinatensysteme zueinander kann dies immer erreicht werden. Verschiebungen wirken sich aber aufgrund der Homogenität des Raumes, Drehungen aufgrund der Isotropie des Raumes nicht auf die physikalischen Gesetze aus.

Multiplikation beider Gleichungen ergibt über $c_0{}^2 = \Gamma^2(\vec{c}_0 - \vec{v})(\vec{c}_0 + \vec{v})$ für

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

und damit erhält man aus den beiden Gleichungen (*) die Transformationsvorschrift für die Zeit $\vec{v}t' = \Gamma(-\beta^2\vec{x} + \vec{v}t)$. Diese ergibt zusammen mit der ersten Gleichung in (*) für den Übergang vom ungestrichenen zum gestrichenen Koordinatensystem die vektorielle Formel für die Lorentz-Transformation ($\beta = v/c_0$):

$$\vec{x}' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\vec{x} - \vec{v}t) \qquad \vec{v}t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(-\beta^2\vec{x} + \vec{v}t) \qquad (\vec{x} \parallel \vec{v}\,^4)$$

Für kleine Geschwindigkeiten v wird daraus wegen $\beta << 1$ und $\Gamma \approx 1$ die Galilei-Transformation ($\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$, $t' = t$).

Schreibt man die Vektorbeziehungen in den Komponenten der Systeme S (x, y, z, t) und S' (x', y', z', t') aus und dreht beide Systeme so, daß die Relativbewegung v beider Systeme in x-Richtung verläuft, dann erhält man die Transformationsgleichungen der

Lorentz-Transformation:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c_0)^2}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - (v/c_0{}^2)x}{\sqrt{1-(v/c_0)^2}}$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-(v/c_0)^2}} \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \frac{t' + (v/c_0{}^2)x'}{\sqrt{1-(v/c_0)^2}}$$

Die Symmetrie ist nicht zufällig, sondern folgt aus dem Postulat der Gleichberechtigung aller Inertialsysteme! Mit Hilfe der Lorentz-Transformation kann man die beiden Postulate der speziellen Relativitätstheorie zusammenfassen, unter der Forderung:

Sämtliche Naturgesetze müssen Lorentz-invariant sein.

Aus den Gleichungen der Lorentz-Transformation ergeben sich unmittelbar einige wichtige Konsequenzen, die in den folgenden Unterkapiteln besprochen werden.

9.2.1. Längenkontraktion

Man betrachtet einen Stab, der an den Endpunkten x_1' und x_2' im System S' in Richtung der x'- Achse fixiert ist. Gegenüber des Systems S bewegt er sich dann mit der Geschwindigkeit v. Die Endpunkte in S sind durch die Lorentz-Transformation gegeben: $x_1' = \Gamma(x_1 - vt_1)$ und $x_2' = \Gamma(x_2 - vt_2)$. Bezeichnet man die „Ruhe“länge des Stabs, also seine Länge $L_0 = x_2' - x_1'$ in S' als seine

---

[4] Wenn $\vec{x}$ nicht parallel zu $\vec{v}$ verläuft, ist die erste der beiden Gleichungen zu ergänzen:

$$\vec{x}' = \vec{x} + (\Gamma - 1)(\vec{x}\cdot\hat{v})\hat{v} - \vec{v}t \qquad (\hat{v} = \vec{v}/v)$$

Eigenlänge und verwendet seine Länge $L(v) = x_2 - x_1$ im System S bei gleichzeitiger Messung ($t_1 = t_2$), so erhält man die

Lorentzkontraktion:	$L(v) = \dfrac{L_0}{\Gamma} = L_0\sqrt{1-(v/c_0)^2}$

Die Länge eines gleichförmig bewegten Körpers ist in seiner Bewegungsrichtung um den Faktor $1/\Gamma = \sqrt{1-(v/c_0)^2}$ kleiner!
Durch analoge Überlegungen kann man zeigen, daß die Längen senkrecht zur Bewegungsrichtung keine Änderung erfahren.

9.2.2. Zeitdilatation

Nun betrachtet man eine am Ursprung $x' = 0$ im System $\mathrm{S'}$ fixierte Uhr, die zwei Ereignisse zu den Zeitpunkten t_1' und t_2' aufnimmt. Die dazugehörigen Werte für das System S erhält man wieder aus der Lorentz-Transformation: $t_1 = \Gamma t_1'$ und $t_2 = \Gamma t_2'$. Nach Einführung der Eigenzeit $T_0 = t_2' - t_1'$, also der vergangenen Zeit in $\mathrm{S'}$, und der in S vergangenen Zeit $T(v) = t_2 - t_1$ erhält man die Formel für die

Zeitdilatation:	$T(v) = T_0\Gamma = \dfrac{T_0}{\sqrt{1-(v/c_0)^2}}$

Die Zeit vergeht für einen gleichförmig bewegten Körper um den Faktor $\Gamma = 1/\sqrt{1-(v/c_0)^2}$ langsamer, bewegte Uhren gehen langsamer!

Die Zeitdilatation wird bestätigt durch die Beobachtung kurzlebiger Elementarteilchen, z.B. den μ-Mesonen, die man einerseits in großen Beschleunigern erzeugen kann, die aber andererseits in der kosmischen Höhenstrahlung vorkommen. μ-Mesonen haben eine Lebensdauer von $t_0 = 2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$. Die durch die Höhenstrahlung erzeugten μ-Mesonen fliegen mit großer Geschwindigkeit, wodurch ihre Lebensdauer auf $t = 50\,t_0$ verlängert wird. Sie legen in der Atmosphäre statt $600\,\mathrm{m}$ nun $30\,\mathrm{km}$ zurück und können auf der Erde erst durch ihre „verlängerte" Flugdauer nachgewiesen werden.

9.2.3. Gleichzeitigkeit

Zwei Ereignisse erfolgen an zwei Orten x_1' und x_2' im $\mathrm{S'}$-System gleichzeitig: $t_1' = t_2'$. Gemäß der Lorentz-Transformation sind die dazugehörigen Zeitpunkte im S-System:

$$t_1 = \frac{t_1' + \beta x_1'/c_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{und} \qquad t_2 = \frac{t_1' + \beta x_2'/c_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Daraus folgt für die Zeitdifferenz der Ereignisse im S-System

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\beta}{c_0}\frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0 .$$

Also sieht ein Beobachter im S -System diese Ereignisse nicht gleichzeitig. Die Uhren im System S zeigen eine Zeitdifferenz an, die von den Orten x_1' und x_2' abhängt.

9.2.4. Addition der Geschwindigkeiten

Nach der Galilei-Transformation besteht zwischen den x-Komponenten der Geschwindigkeiten[5] u und u' in den Systemen S und S', die sich mit der Geschwindigkeit $v \parallel x$ gegeneinander bewegen, der Zusammenhang $u_x' = u_x - v$ bzw. $u_x = u_x' - v$. Dies ist nicht mit der speziellen Relativitätstheorie vereinbar, da sich z.B. Licht, von einer bewegten Lichtquelle ausgesendet, nicht schneller bewegt als Licht, das aus einer ruhenden Lichtquelle stammt. Durch Bildung der Ableitung der Lorentz-Transformation mit Hilfe der Kettenregel $u_x' = \mathrm{d}x'/\mathrm{d}t' = (\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t)(\mathrm{d}t/\mathrm{d}t')$ und $u_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}x/\mathrm{d}t')(\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t)$ erhält man nach einer kurzen Rechnung die

Addition von Geschwindigkeiten in longitudinaler ($\parallel v$) Richtung:

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \beta(u_x/c_0)} \qquad u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \beta(u_x'/c_0)}$$

Setzt man $u_x / c_0 = \alpha$, so wird daraus

$$\alpha' = \frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha\beta} \qquad \text{bzw.} \qquad \alpha = \frac{\alpha' + \beta}{1 + \alpha'\beta}.$$

α' wächst monoton zwischen $-\beta$ und 1 für α zwischen 0 und 1. α wächst ebenfalls monoton zwischen β und 1 für α' zwischen 0 und 1. Die Lichtgeschwindigkeit wird also in keinem Fall überschritten.

Die Lichtgeschwindigkeit ist eine Grenze, die von materiellen Körpern nur asymptotisch, aber nie exakt erreicht oder überwunden werden kann. Dies wird ebenfalls im Rahmen der Betrachtung der Energie und Masse bewegter Körper deutlich. Es gibt auch keine Partikel- (Gruppen- oder Signal-)Geschwindigkeit, die größer als die Lichtgeschwindigkeit ist. Die Phasengeschwindigkeit kann allerdings größer sein (siehe z.B. 7.1.5.4 Hohlleiter).

Analog erhält man für die

Addition von Geschwindigkeiten in transversaler ($\perp v$) Richtung:

$$u_{y,z}' = \frac{u_{y,z}}{\Gamma(1 - \beta(u_x/c_0))} \qquad u_{y,z} = \frac{u_{y,z}'}{\Gamma(1 + \beta(u_x'/c_0))}$$

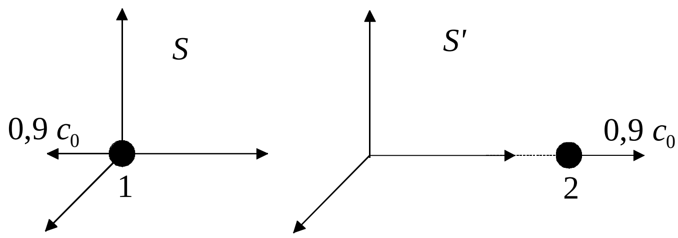
Im Gegensatz zu den zur Bewegungsrichtung senkrechten Komponenten der Längen werden auch die Komponenten $\perp v$ verändert. Die Geschwindigkeiten werden kleiner, da durch die Zeitdilatation bewegte Uhren langsamer gehen.

---

[5] In diesem Abschnitt sollen Teilchengeschwindigkeiten mit dem Buchstaben *u* bezeichnet werden. Der Buchstabe *v* beschreibt die Relativgeschwindigkeiten der Bezugssysteme S und S' gegeneinander.

Beispiel:
Zwei Teilchen bewegen sich mit je $v = 0{,}9\,c_0$ relativ zu einem Beobachter Im System S' voneinander weg. Wie groß ist die Relativgeschwindigkeit des einen Teilchens gegen das andere? Teilchen 2 ruhe im S-System, das sich mit $v = 0{,}9\,c_0$ gegen das System S' nach links bewegt. Teilchen 1 hat in S' die Geschwindigkeit $u_x' = 0{,}9\,c_0$, dann ergibt sich:

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + u_x (v / c_0^2)} = \frac{0{,}9\,c_0 + 0{,}9\,c_0}{1 + (0{,}9)^2} \approx 0{,}994\,c_0$$



Die Geschwindigkeit von Teilchen 1 relativ zu Teilchen 2 ist kleiner als c_0.

9.2.5. Dopplereffekt

Bei Schallwellen tritt eine Frequenzänderung auf, wenn sich die Schallquelle gegen das Medium bewegt und der Beobachter ruht oder wenn sich der Beobachter gegen das Medium bewegt und die Schallquelle ruht:

$$f_a = f_0 \frac{1}{1 - v / v_{ph}} \qquad \text{bzw.} \qquad f_b = f_0 \left(1 + \frac{v}{v_{ph}} \right) \neq f_a .$$

Hierbei ist $f_0 =$ Frequenz bei ruhender Quelle und ruhendem Beobachter, $v =$ Relativgeschwindigkeit und $v_{Ph} =$ Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium, Phasengeschwindigkeit (vergleiche 4.2.6). In diesem Fall wird die Galileitransformation für die Addition der Geschwindigkeiten benutzt.

Daß bei Licht anders vorgegangen werden muß, war das Ergebnis des Experiments von Michelson-Morley. Für Licht erhält man die Formel für den Dopplereffekt, wenn man in der Lorentz-Transformationsgleichung für die Zeit statt t die Periode T der Welle und statt x die Wellenlänge λ einsetzt:

$$\frac{c_0}{f} = \lambda = \frac{\lambda' + vT'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{c_0 / f' + v / f'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{c_0}{f'} \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{c_0}{f'} \sqrt{\frac{(1+\beta)^2}{1-\beta^2}} .$$

Dopplereffekt des Lichts:	$f = f' \sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$

Dasselbe Ergebnis erhält man in umgekehrter Richtung in Übereinstimmung mit dem speziellen Relativitätsprinzip (Postulat I). Es ist also gleichgültig, ob sich der Beobachter oder die Quelle bewegt. Das ruhende Medium, den Äther gibt es ja nicht!

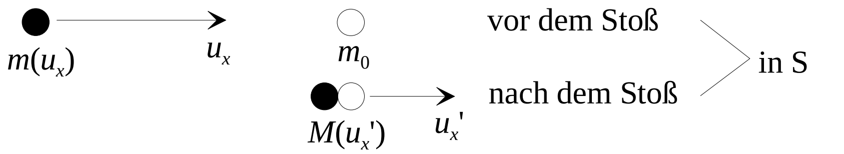
9.3. Relativistische Masse, Energie, Impuls

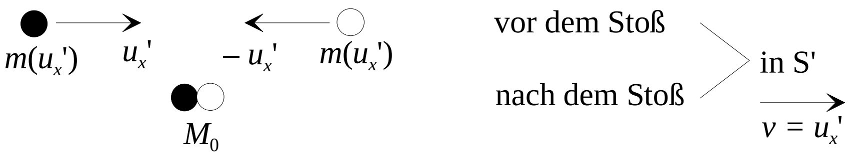
Die Forderung der speziellen Relativitätstheorie der Lorentz-Invarianz aller Naturgesetze gilt auch für die Impulserhaltung und den Energiesatz der Mechanik, die beide auch in der speziellen Relativitätstheorie ihre Gültigkeit behalten. Daraus lassen sich das Verhalten von Masse, Impuls und Energie von Teilchen bei Änderung der Relativgeschwindigkeiten ableiten.

9.3.1. Relativistische Masse

In der klassischen Mechanik wurde im Einklang mit der Erfahrung als Postulat die Konstanz der Masse aufgestellt. Dies ist nicht mit dem Energie- und Impulserhaltungssatz bezüglich der Lorentz-Transformation verträglich. Im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie ist die Masse eines Teilchens nicht unabhängig vom System, in dem sie gemessen wird. Man unterscheidet daher zwischen der Ruhemasse m_0 (Masse gemessen im System, relativ dem das Teilchen ruht) und der relativistischen Masse $m(u)$, der Masse des Teilchens bei Bewegung mit der Geschwindigkeit u relativ zum Beobachter.

Zur Untersuchung der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse betrachten wir einen inelastischen Stoß zwischen zwei identischen Teilchen. Als System S' verwenden wir das Schwerpunktssystem, als System S das System, in dem eines der Teilchen vor dem Stoß ruht (siehe Skizze). Das System S' bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = u_x'$ in Stoßrichtung gegenüber S'.





Die relativistische Masse und der Impuls sind Lorentz-invariant:

$$m(u_x) + m_0 = M(u_x') \qquad\qquad m(u_x)u_x + 0 = M(u_x')u_x' .$$

Setzt man die erste Gleichung in die zweite ein, so ergibt sich:

$$\frac{m(u_x)}{m_0} = \frac{u_x'}{u_x - u_x'} = \frac{v}{u_x - v} = \frac{\beta}{u_x / c_0 - \beta} = \frac{\beta}{\alpha - \beta} .$$

Das Additionstheorem der Geschwindigkeiten für $\alpha = u_x / c_0$ und $\alpha' = \beta$ (9.2.4) ergibt

$$\alpha = \frac{\alpha' + \beta}{1 + \alpha' \beta} = \frac{2\beta}{1 + \beta^2} \qquad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \sqrt{1 - \alpha^2}\right)$$

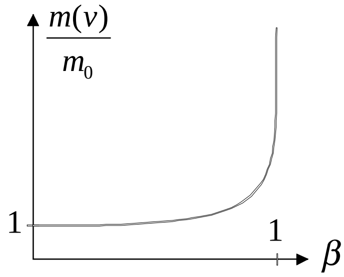
und damit

$$\frac{m(u_x)}{m_0} = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 - \alpha\beta} = \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha^2 - (1 - \sqrt{1 - \alpha^2})} = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - u_x{}^2 / c_0{}^2}} .$$

Bedenkt man, daß die Richtung Stoßrichtung x willkürlich gewählt wurde, so kann man den Index an u_x weglassen und die Geschwindigkeit v nennen:

Relativistische Masse: $$m(v) = m_0\Gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c_0{}^2}}$$

Ein bewegtes Teilchen hat für den ruhenden Beobachter eine größere träge Masse. Sie strebt gegen ∞ für $v \to c_0$. Die Massenvergrößerung kann experimentell beobachtet werden, z.B. an Elektronen, die mit großen Beschleunigern (Elektronenschleuder, Betatron) auf sehr große Geschwindigkeiten gebracht werden.
Für die Geschwindigkeiten unseres Alltags ist mit hoher Genauigkeit die Masse $m(v) = m_0$ (Ruhemasse).



relative Massenzunahme als Funktion von: $v/c_0 = \beta$

9.3.2. Relativistischer Impuls

In der Newtonschen Mechanik ist für ein Teilchen der Masse m_0, das sich in einem Inertialsystem mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, der Impuls $\vec{p}$ in diesem Inertialsystem als $\vec{p} = m_0\vec{v}$ definiert. In der speziellen Relativitätstheorie dagegen hat das Teilchen in einem Inertialsystem, das sich gegen das Beobachtungssystem mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, die Masse m_0 und im Beobachtungssystem die Masse Γm_0, so daß man definiert

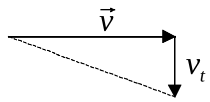
Relativistischer Impuls: $$\vec{p}(\vec{v}) = m(\vec{v})\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c_0{}^2}}\vec{v}$$

Analog gilt weiterhin die Definition der Kraft über die zeitliche Impulsänderung:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c_0{}^2}}\right)$$

Um die Kraftkomponente in transversaler Richtung (senkrecht zur Bewegung $\vec{v}$ des Teilchens) zu berechnen, betrachten wir eine Änderung der Geschwindigkeitskomponente, die senkrecht auf $\vec{v}$ steht: $\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}v_\perp/\mathrm{d}t$

Dies verändert $v = |\vec{v}|$ nicht und wir erhalten:



$$F_\perp = \frac{\mathrm{d}v_\perp}{\mathrm{d}t}\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c_0{}^2}}$$

Bei der Kraftkomponente in longitudinaler Richtung (parallel zur Bewegung $\vec{v}$ des Teilchens) ist eine vollständige Differentiation nötig:

$$F_\parallel = \frac{\mathrm{d}v_\parallel}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c_0{}^2}} - \frac{1}{2}\frac{m_0 v(-2(v/c_0{}^2))}{(1-v^2/c_0{}^2)^{3/2}}\right) = \frac{\mathrm{d}v_\parallel}{\mathrm{d}t}\frac{m_0}{(1-v^2/c_0{}^2)^{3/2}}$$

Man bezeichnet $m_0/(1-v^2/c_0{}^2)^{3/2}$ auch als longitudinale träge Masse und $m_0/\sqrt{1-v^2/c_0{}^2}$ als transversale träge Masse.

9.3.3. Relativistische Energie

Auch die Energie muß nach relativistischen Gesetzen berechnet werden. Dazu verwendet man die Definition der Arbeit und der relativistischen Kraft und formt den Ausdruck mit Hilfe der Kettenregel der Differentialrechnung einige Male um:

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{x} = \vec{F}\,\vec{v}\,\mathrm{d}t = F_{\parallel} v\,\mathrm{d}t = \frac{m_0 v}{(1-v^2/c_0{}^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{m_0 v}{(1-v^2/c_0{}^2)^{3/2}}\mathrm{d}v = \mathrm{d}\left(\frac{m_0 c_0{}^2}{\sqrt{1-v^2/c_0{}^2}}\right) = \mathrm{d}(m(v)c_0{}^2)$$

Berechnet man die Arbeit zwischen dem Punkt 1, bei welchem die Masse in Ruhe ist ($v = 0$) und dem Punkt 2, bei welchem die Masse die Geschwindigkeit $v = v'$ hat, so erhält man

$$W = \int_1^2 \mathrm{d}W = m(v)c_0{}^2\Big|_{v=0}^{v=v'} = (m(v') - m_0)\,c_0{}^2 = \Delta m\,c_0{}^2\,.$$

Den Term $m_0 c_0{}^2$ nennt man <u>Ruheenergie</u>.

Relativistische Gesamtenergie:	$E(v) = m(v)\,c_0{}^2$

Masse und Energie sind proportional zueinander, beide Größen sind äquivalent. Masse und Energie können ineinander umgewandelt werden.

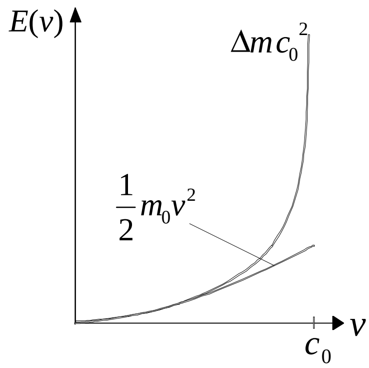
Entwickelt man die Energie um $v = 0$ in eine Taylorreihe, so besitzt die relativitische Gesamtenergie einen konstanten Term (Ruheenergie) und eine von der Geschwindigkeit abhängenden Term:

$$E(v) = m(v)\,c_0{}^2 = \frac{m_0 c_0{}^2}{\sqrt{1-v^2/c_0{}^2}} = m_0 c_0{}^2 + \frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + \ldots\,.$$

Letzterer geht für kleine Geschwindigkeiten ($v \ll c_0$) in die kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}m_0 v^2$ der klassischen Mechanik über. In relativistischer Berechnung gilt für die kinetische Energie exakt:

$$E_{kin} = (m(v) - m_0)\,c_0{}^2 = \Delta m\,c_0{}^2\,.$$

In der nebenstehenden Abbildung ist die relativistische und die klassische kinetische Energie gegen die Geschwindigkeit aufgetragen. Für den Fall $v \ll c_0$ haben beide Kurven einen ähnlichen Verlauf. Für $v \approx c_0$ steigt die relativistische Kurve stärker an.



9.3.4. Teilchen ohne Ruhmasse

Die Erfahrung und ihre mathematische Umsetzung in der Quantenmechanik lehrt, daß insbesondere im atomaren Bereich ein Welle-Teilchen Dualismus besteht (10.1), daß also klassische materielle Teilchen Wellencharakter annehmen können (Interferenzerscheinungen) und andererseits klassische Wellenfelder in dem Sinne korpuskular sind, daß sie Energie und Impuls lokal und gequantelt z.B. mit materiellen Teilchen austauschen können (10.1.1 Photoeffekt, 10.1.3 Comptoneffekt). Aufgrund des Energie-Masse-Äquivalenzprinzips der speziellen Relativitätstheorie kann man diesen Quanten eine träge Masse m zuordnen und erhält:

$$E = \hbar\omega = m c_0^2 \qquad \text{(Energiequant)}$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} = m\vec{c}_0 \qquad \text{(Impulsquant)}$$

wegen $v = c_0$ bei Lichtquanten. Wegen $m_0 = m\sqrt{1-\beta^2}$ und $\beta = v/c_0 = 1$ ist $m_0 = 0$. Das Photon ist ein Teilchen mit der Ruhemasse 0! Neutrinos dagegen, Teilchen, die sich im Rahmen der Meßgenauigkeit mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, haben wohl doch eine von Null verschiedene, kleine Ruhemasse. Dies ist das Ergebnis neuerer, sehr komplexer und schwieriger Experimente.

9.3.5. Umwandlung Masse – Energie

Zwei identische Teilchen der Ruhemasse m_0 und Geschwindigkeit v stoßen inelastisch aufeinander, d.h. sie bewegen sich nach dem Stoß gemeinsam weiter und bilden so ein Teilchen der Ruhemasse M_0. Die Energie der beiden Teilchen im Schwerpunktsystem beträgt vor bzw. nach dem Stoß:

$$E_{vor} = 2m(v)\,c_0^2 = 2\frac{m_0\,c_0^2}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}} \qquad \text{bzw.} \qquad E_{nach} = M_0 c_0^2 .$$

Dabei wurde allerdings vorausgesetzt, daß keine innere Energie beteiligt ist (2.2.5.3). Aufgrund der Energieerhaltung müssen beide Terme gleich sein ($E_{vor} = E_{nach}$). Löst man nach M_0 auf und entwickelt in eine Taylorreihe

$$M_0 = 2\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}} = 2\left[m_0 + \frac{1}{2}m_0\left(\frac{v}{c_0}\right)^2 + \frac{3}{8}m_0\left(\frac{v}{c_0}\right)^4 + \ldots\right]$$

so erkennt man, daß sich die Massen der beiden Teilchen nicht einfach addieren: Die Ruhemasse des entstehenden Teilchens ist größer als die Ruhemasse der beiden Einzelteilchen zusammen. Sie enthält einen Beitrag aus der kinetischen Energie der vernichteten Teilchen. Die kinetische Energie $E_{kin} = \Delta m\, c_0^2$ wurde also in Masse umgewandelt.

Bei makroskopischen Prozessen ist die Massenzunahme aufgrund der niedrigen erreichbaren Geschwindigkeiten viel zu gering, als daß sie gemessen werden könnte. Bei Wechselwirkungen zwischen Atomen kann sie aber sehr wohl ins Gewicht fallen. Die Masse-Energie-Äquivalenz kann bei Kernreaktionen (Kernspaltung, Kernfusion) quantitativ bestätigt werden. Die Kernreaktion

$$A + B \rightarrow C + D + \text{frei werdende Energie}$$

führt zu der Massegleichung

$$(m_A + m_B) - (m_C + m_D) = \Delta m = \frac{E}{c_0^{\ 2}}\,.$$

Δm bezeichnet man als Massendefekt.

9.3.6. Transformation von *E* und *B*

Die Gesamtkraft auf eine bewegte Ladungen im ruhenden System ist gegeben durch die Coulomb-Kraft und die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E} + Q\,\vec{v} \times \vec{B}\,.$$

Für einen mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ mitbewegten Beobachter gibt es jedoch keine Lorentzkraft, da die Ladung Q in seinem System ruht. Er deutet die Ablenkung durch eine rein elektrische Feldstärke

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\,.$$

Bei genauer Betrachtung muß die Längenkontraktion berücksichtigt werden: Feldliniendichten ändern sich. Man erhält folgende Transformation für die Komponenten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ($x \parallel v = v_x$):

Transformationsgleichungen für das elektromagnetische Feld:

$$E_x' = E_x \qquad\qquad B_x' = B_x$$

$$E_y' = \Gamma\left(E_y - v_x B_z\right) \qquad\qquad B_y' = \Gamma\left(B_y + (v_x / c_0^{\ 2}) E_z\right)$$

$$E_z' = \Gamma\left(E_z + v_x B_y\right) \qquad\qquad B_z' = \Gamma\left(B_z - (v_x / c_0^{\ 2}) E_y\right)$$

Die Maxwellschen Gleichungen behalten im bewegten System $\mathrm{S'}$ dieselbe Gestalt wie im ruhenden System S, wenn man beim Übergang von S nach $\mathrm{S'}$ die Größen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ durch die entsprechenden Größen im gestrichenen System ersetzt. Die Maxwell-Gleichungen sind Lorentz-invariant.