10.05.2002

4. Übung zur Vorlesung Informatik B

Institut für Informatik, FU Berlin, SoSe 2002

1. (5 Punkte) Für welche Paare $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ der folgendermaßen definierten Funktionen gilt $f(n) = O(g(n))$, für welche gilt $f(n) = \Omega(g(n))$ und für welche gilt $f(n) = \Theta(g(n))$?

   (a) $n \mapsto \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

   (b) $n \mapsto \lfloor \log_{10} n \rfloor$

   (c) $n \mapsto \lfloor n \log_2 n \rfloor$

   (d) $n \mapsto 176n^2 - 36n + 17$

   (e) $n \mapsto 1000n$

   (f) $n \mapsto \lfloor \log_2 n \rfloor$

   (g) $n \mapsto \lfloor n \log_2 n \rfloor + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

2. (4 Punkte) Ist die folgende Argumentation korrekt?

   Wir beweisen $\Sigma_{k=1}^{n} k^2 = O(n^2)$ durch Induktion.

   Induktionsverankerung Für $n = 1$ gilt $\Sigma_{k=1}^{n} k^2 = 1 = O(n^2)$.

   Induktionsannahme $\Sigma_{k=1}^{n} k^2 = O(n^2)$.

   Induktionsschritt $\Sigma_{k=1}^{n+1} k^2 = (\Sigma_{k=1}^{n} k^2) + (n+1)^2 = O(n^2) + O(n^2) = O(n^2)$.

3. (1 Punkt) Erklären Sie, warum die Aussage 'die Laufzeit eines Algorithmus ist mindestens $O(n^2)$' sinnlos ist.

4. (4 Punkte) Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Funktionen mit $f(n) = \Theta(g(n)$. Beweisen Sie, dass dann gilt:

$$\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$$

5. (4 Zusatzpunkte) Stellen Sie sich die Realisierung der Union–Find–Struktur im Kruskal–MST–Algorithmus wie folgt vor. Alle Knoten innerhalb einer Zusammenhangskomponente in einer Zwischenlösung zeigen direkt auf einen Repräsentantenknoten der Komponente. Die Union–Operation zweier Komponenten geschieht dadurch, dass die Zeiger in der kleineren Komponente auf den Repräsentanten der anderen Komponente umgehangen werden. Betrachten Sie einen einzelnen Knoten im Graphen. Wie oft wird sein Zeiger während des gesamten Algorithmus höchstens umgehangen? Tipp: Schauen Sie sich die aktuellen Größen der Komponenten an, in denen der Knoten grad ist. Dies ist übrigens ein sehr schönes Beispiel einer so genannten amortisierten Komplexitätsanalyse.

Abgabe: 22.05.2002, 12 Uhr s.t.